Halmazok, relációk, függvények

Toledo Rodolfo

Tartalomjegyzék

2016

Halmazok, relációk, függvények

PDF fájlformátumban megjelent elektronikus tananyag

Szerző: Dr. Toledo Rodolfo Calixto, főiskolai tanár

Készült: 2016.07.09

Korrektúra: Barsy Anna

Lektorálta: Dr. Gát György, egyetemi tanár, DSc

ISBN 978-963-12-6081-6

1. Bevezetés

A matematika egy olyan tudományág, ahol „deduktív” módon, helyes logikai következtetésekkel tudunk fogalmakból és állításokból további állításokat levezetni, újabb fogalmakat létrehozni. Ebben nagy jelentősége van a halmazelméletnek, hiszen a matematika által vizsgált objektumok végső soron halmazok. Így válik a halmaz a matematika egyik legalapvetőbb fogalmává, annak ellenére, hogy a halmazelmélet, mint a matematika egyik ága, elég „későn”, a XIX században fejlődött ki. Ennek a tananyagnak nem az a célja, hogy a halmazelmélet ú.n. axiomatikus tárgyalásával foglalkozzon, hiszen akkor egy teljes szemesztert kellene ennek a külön matematikai ágnak szentelni. A célunk az, hogy megalapozzuk a matematikai analízisben található legfontosabb fogalmakat, azokat, amelyeket elég könnyen alkalmazunk majd a későbbi, magasabb szintű tanulmányokban.

Halmazokkal és ebben a tananyagban található számos fogalommal már középiskolában találkoztunk. Ezek az ismeretek segítenek a tananyag jobb megértésében, a könnyebb haladásban. További, középiskolában már tanult ismeretekre is szükségünk lesz, hiszen ezek segítenek megoldani a kitűzött feladatokat. Olyan ismeretekre gondolunk, mint a koordinátageometria, a valós számokon értelmezett „legelemibb” függvények tulajdonságai, stb. Csak akkor értjük meg igazán a tételeket és a fogalmakat, ha példákon keresztül illusztráljuk őket. Másrészt a középiskolában intuitív módon megismert fogalmakat is teljes matematikai precizitással fogjuk megfogalmazni.

A 2. és a 3. részben a halmazok „naiv” tárgyalásával foglalkozunk. Igaz, az itt található fogalmakat már középiskolában tanultuk, azonban külön hangsúlyt fektetünk a halmazok egyenlőségének bizonyítására, és részletesen megmutatjuk, hogyan lehetséges egy ilyen bizonyítást megadni a definíció és a halmazműveleti tulajdonságok alapján. Fontos, hogy tisztában legyünk a matematikai logika alapismereteivel.

A tananyag fő célja az általános függvényfogalom megalkotása és vizsgálata. Középiskolában azt tanultuk, hogy a függvény két halmaz közötti egyértelmű hozzárendelés. Felmerül a kérdés, mit jelent a hozzárendelés szó, ezért a 4. részben tanuljuk a reláció (más néven hozzárendelés) fogalmát, és látni fogjuk, hogy néhány, a függvényekre jellemző fogalom, mint az értelmezési tartomány és az értékkészlet már a relációknál is megadható. Emellett a relációk között értelmezzük az inverz relációt és a kompozíció műveletet. Ezeket az ismereteket kamatoztatjuk az 5. részben, ahol a relációk egy szűkebb, de lényeges osztályával, a függvényekkel foglalkozunk.

A függvényfogalom jobb megértéséhez külön részt szánunk a halmazok függvény szerinti képe és inverzképe tanulmányozására. Ez a tananyag 6. részében történik, ahol több feladatot animált ábrákkal oldunk meg, és ezután vizsgájuk a halmazok függvény szerinti képének és inverzképének általános tulajdonságait. Ilyen például a kapcsolatuk a halmazműveletekkel. Ennek a résznek az ismereteit alkalmazzuk a 7. részében, ahol összetett függvények meghatározásával foglalkozunk több gyakorlati példán keresztül.

A halmazok elemeit semmilyen módon nem korlátozzuk, így azok halmazok is lehetnek. Ilyenek például a rendezett párok és a hatványhalmazok. Ezekkel foglalkozik a 8. rész, ahol ki tudjuk terjeszteni a halmazműveleteket végtelen számú halmazra is, és bevezetjük az indexhalmaz fogalmát. Végül a 9. részben az „önmagára vett” relációkat vizsgáljuk, így megkapjuk az ekvivalenciareláció és a rendezési reláció definícióját. Ezek a relációk fontos szerepet kapnak az analízis további fejezeteiben, például a modern számfogalom megalkotásában.

A tananyag feldolgozásának módszere a matematikában szokásos négyes tagozódásból áll: definíció, tétel, bizonyítás, alkalmazás (feladatok). A jobb megértést elősegíti, hogy a definíciókat egyszerű példákkal szemléltetjük. A definiált fogalmakra tételeket mondunk ki és precízen bizonyítjuk ezeket. A tananyag teljes elsajátításához több mintafeladatot oldunk meg, melyeket ábrákkal, animációkkal illusztrálunk. Az utolsó részben feladatokat tűzünk ki megoldás nélkül, melyek a lehetséges gyakorlati foglalkozások anyagát képezhetik. Megoldásuk előtt javasoljuk a tananyagban megoldott feladatok tanulmányozását és megértését.

A tananyagban $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$ és $\mathbf{R}$ jelöli a természetes, egész és valós számok halmazát. A „$:=$” jelölés a definiáló egyenlőséget jelenti.

2. Halmazok

A matematika fogalmakkal dolgozik, méghozzá előre pontosan meghatározott absztrakt fogalmakkal. Nem lehet vita mit értünk egy adott fogalom alatt. Ha szeretnénk egy új fogalmat értelmezni (vagy idegen szóval a definícióját megadni), akkor kizárólag már ismert, értelmezett fogalmakat alkalmazhatunk. Ez nyilvánvalóan azt a helyzetet teremti, hogy lennie kell induló alapfogalmaknak, nem lehet a „végtelenségig" visszatekinteni a definíciókban. Ahhoz, hogy az analízisben előforduló fogalmakat értelmezni tudjuk, alapfogalomnak tekintjük a **halmazt**, az **elemet** és az **elem halmazhoz való tartozását**.

Az előzőekben nincs semmi „furcsaság". Például próbáljuk meghatározni az asztal fogalmát. Hamar rájövünk, hogy az asztalra nem jellemző, hogy hány lába van, milyen az alakja, felülete vagy használati célja, azonban egy gyerek is pontosan el tudja dönteni, hogy egy kiszemelt tárgy asztal-e vagy sem. Így vagyunk a legtöbb tárgyfogalommal is.

Az, hogy a halmazt nem definiáljuk, nem jelenti azt, hogy nem lehet körülírni a jelentését. Ezt a középiskolában a következő módon szokás megadni: „egy halmaz közös tulajdonságú, de különböző elemek együttese".

A halmazokat általában latin nagybetűkkel, míg a halmaz elemeit kisbetűkkel jelöljük. Azt, hogy az a eleme az A halmaznak az $a \in A$, ennek tagadását az $a \notin A$ szimbólummal jelöljük. Egy halmaz elemei lehetnek fizikai tárgyak, elvont matematikai fogalmak, vagy akár halmazok is. A lényeg, hogy bármiről el lehessen dönteni azt, hogy bele tartozik-e a szóban forgó halmazba vagy sem. Egy halmazt megadhatunk elemeinek felsorolásával, vagy úgy, hogy megadjuk elemeinek tulajdonságát. Mindkét esetben kapcsos zárójelet használunk. Például a pozitív páros számok megadásához használhatjuk a

$$\{2, 4, 6, \dots\}, \qquad \{n \in \mathbf{N}^+ : n \text{ páros}\} \qquad \text{vagy} \qquad \{n \in \mathbf{N} : n = 2k,\ k = 1, 2, \dots\}$$

jelölést. Fontos, hogy egy halmazban nem soroljuk fel kétszer ugyanazt az elemet.

Előfordulhat, hogy tulajdonsággal egy olyan halmazt adunk meg, amely tulajdonságot egyetlen egy elem sem elégíti ki. Például

$$\{x \in \mathbf{R} : x^2 + 1 = 0\}.$$

Ezért is célszerű olyan halmaz létezését feltételezni, amelynek egyetlen eleme sincs. Ezt a halmazt **üres halmaznak** nevezzük, és $\emptyset$ szimbólummal jelöljük. Fontos megjegyezni, hogy $\emptyset$ nem egyenlõ a $\{\emptyset\}$ módon megadott halmazzal. Az elsőnek nincsenek elemei, míg a másodiknak egy eleme van.

Olyan halmaz létezését is célszerű feltételezni, amely minden, egy adott esetben vagy feladatban egyáltalán szóba jöhető elemet tartalmaz. Ezt a halmazt **alaphalmaznak** nevezzük, és H-val jelöljük. Az előbbi példánál maradva, ha a valós számok halmazát tekintenénk alaphalmaznak, ahogy azt a középiskolában tettük, akkor az $\{x : x^2 + 1 = 0\}$ halmaz üres, így nem kellett tudni, hogy van a valós számoknál bővebb halmaz, amelyet alaphalmazként választva az előző halmaz már nem üres.

A halmazokat jobb szemléltetésük érdekében, sematikusan egymást átfedő körökkel vagy más, síkbeli tartományokkal ábrázoljuk. Így sokszor egyszerűbb kapcsolatokat keresni a halmazok között. Az ilyen ábrázolást **Venn-diagramnak** nevezzük.

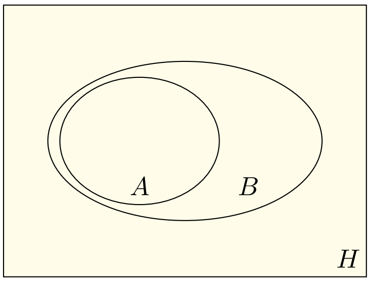
John Venn (1834-1923), matematikai logikával foglalkozó angol matematikus a róla elnevezett diagram által vált halhatatlanná. Ő érhetővé és formálissá tette a diagram használatát. Tiszteletére, a Cambridge Egyetemen, ahol dolgozott, egy a diagramjáról mintázott üveg látható.

A kép forrása: Wikipédia

A továbbiakban alapvető halmazelméleti fogalmakkal ismerkedünk meg.

1. Definíció. *Az A halmaz **részhalmaza** a B halmaznak, ha minden $x \in A$ esetén $x \in B$ teljesül. Ezt $A \subseteq B$, vagy $B \supseteq A$ módon jelöljük.*

Venn-diagrammal az $A \subseteq B$ tulajdonság a következő módon ábrázolható:



Például az egész számok halmaza részhalmaza a racionális számok halmazának, az utóbbi részhalmaza a valós számok halmazának. Az üres halmaz minden halmaznak részhalmaza. Ez az állítás a matematikai logika implikáció **igazságtáblázatán** alapszik:

p	q	p és q **(konjunkció)** Jele: $\wedge$	p vagy q **(diszjunkció)** Jele: $\vee$	ha p, akkor q **(implikáció)** Jele: $\Longrightarrow$	p akkor és csak akkor, ha q **(ekvivalencia)** Jele: $\Longleftrightarrow$
i	i	i	i	i	i
i	h	h	i	h	h
h	i	h	i	i	h
h	h	h	h	i	i

Az implikáció csak akkor hamis, ha a feltétel igaz, de a következmény hamis. Így, ha A egy tetszőleges halmaz, akkor az $x \in \emptyset$ állítás hamis, amiből következik, hogy a teljes „ha $x \in \emptyset$, akkor $x \in A$” állítás igaz.

A részhalmaz fogalma segítségével értelmezhetjük a halmazok egyenlőséget.

2. Definíció. *Az A és a B halmazok* ***egyenlők****, ha $A \subseteq B$ és $B \subseteq A$ egyszerre teljesül. Ezt $A = B$, ennek tagadását $A \neq B$ módon jelöljük.*

A fenti definíció értelmében, ha szeretnénk bebizonyítani, hogy két halmaz egyenlő, akkor vegyünk az egyikből egy tetszőleges elemet és igazoljuk, hogy a másik halmaznak is eleme. Ezután fordítva tesszük ugyanezt.

3. Definíció. *Az A halmaz* ***valódi részhalmaza*** *a B halmaznak, ha $A \subseteq B$, de $A \neq B$. Ezt $A \subset B$, vagy $B \supset A$ módon jelöljük.*

Például a pozitív valós számok halmaza valódi részhalmaza a nem negatív valós számok halmazának.

1. Feladat. *Legyen $A = \{a, \{\emptyset\}, \{a, \{\emptyset\}\}\}$. Az alábbi állítások közül melyik igaz és melyik hamis?*

a) $a \in A$	*b)* $\{a\} \subseteq A$	*c)* $\{a\} \in A$
d) $\emptyset \in A$	*e)* $\emptyset \subseteq A$	*f)* $\{\emptyset\} \subseteq A$
g) $\{\{\emptyset\}\} \subseteq A$	*h)* $\{a, \{\emptyset\}\} \in A$	*i)* $\{a, \{\emptyset\}\} \subseteq A$

Megoldás: Az A halmaznak három eleme van: a, $\{\emptyset\}$ és $\{a, \{\emptyset\}\}$. Ezért

a) igaz,

b) igaz, hiszen $a \in A$,

c) hamis, a eleme az A halmaznak, de $\{a\}$ nem eleme,

d) hamis, $\{\emptyset\}$ eleme az A halmaznak, de $\emptyset$ nem eleme,

e) igaz, és ez igaz minden A halmazra,

f) hamis, hiszen $\emptyset \notin A$,

g) igaz, hiszen $\{\emptyset\} \in A$,

h) igaz,

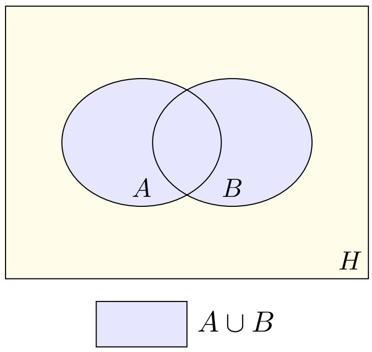
i) igaz, hiszen $a \in A$ és $\{\emptyset\} \in A$.

3. Halmazműveletek

Középiskolás tanulmányainkban már találkoztunk a halmazműveletekkel. Vegyük újra a fogalmukat és készítsük el a Venn-diagramjukat!

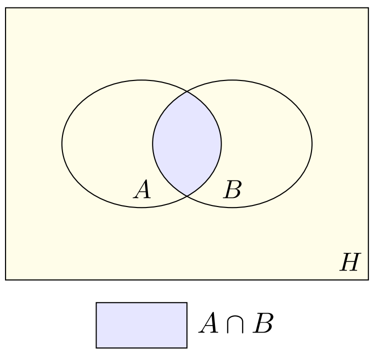
4. Definíció. *Az A és B* ***halmazok uniója*** *vagy* ***egyesítése*** *azon elemek halmaza, amelyek A és B közül legalább az egyiknek elemei. Jele $A \cup B$.*

Venn-diagrammal az A és B halmazok unióját a következő módon ábrázoljuk:



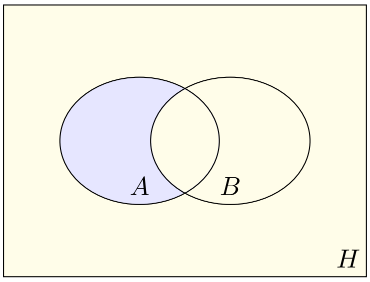
5. Definíció. *Az A és B* ***halmazok metszete*** *vagy* ***közös része*** *azon elemek halmaza, amelyek az A-nak és ugyanakkor a B-nek is elemei. Jele $A \cap B$.*

Venn-diagrammal az A és B halmazok metszetét a következő módon ábrázoljuk:



6. Definíció. *Az A és B* ***halmazok különbsége*** *azon elemek halmaza, amelyek A-nak elemei, de ugyanakkor a B-nek nem elemei. Jele $A \setminus B$.*

Venn-diagrammal az A és B halmazok különbségét a következő módon ábrázoljuk:

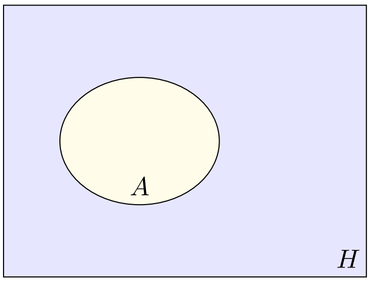


$A \setminus B$

A következő fogalom értelmezéséhez szükséges a H alaphalmazt ismerni.

7. Definíció. *Az A halmaz* ***komplementerén*** *a $H \setminus A$ halmazt értjük. Jele $\overline{A}$.*

Venn-diagrammal az A halmaz komplementerét a következő módon ábrázoljuk:

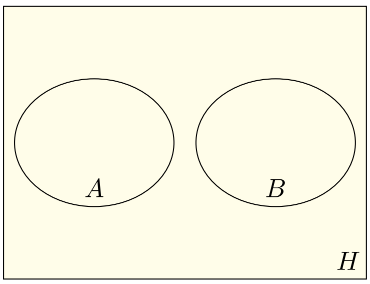


$\overline{A}$

A halmazműveletekkel kapcsolatban még egy fontos fogalmat fogunk bevezetni.

8. Definíció. *Az A és B halmazokat* ***diszjunktnak*** *nevezzük, ha $A \cap B = \emptyset$.*

Venn-diagrammal a diszjunkt halmazok tulajdonsága a következőképpen ábrázolható:



Két halmaz diszjunkt, ha nincs közös elemük, pl. a páros és a páratlan számok halmaza diszjunkt halmazok.

Az előzőekben értelmezett halmazműveletek többször egymásután is következhetnek. Zárójelekkel megadható, hogy melyik műveleteket kell először végrehajtani. Hogy ne kelljen mindenhová zárójeleket tenni, a következő **precedencia szabályt** követjük. Először a komplementer, majd a különbség következik. Végül az unió és a metszet marad, amelyek egyforma „erősek”, így kötelező zárójeleket alkalmazni a félreértések elkerülése érdekében. Ezek szerint az $A \cup B \cap C$ halmaz nem értelmezhető.

2. Feladat. *Adjuk meg az $(A \cup B) \setminus (B \cap \overline{C})$ halmazt ha*

$$\begin{aligned} A &:= \{n \in \mathbf{N} \colon n \text{ páros}\}, \\ B &:= \{n \in \mathbf{N} \colon n \text{ hárommal osztható}\}, \\ C &:= \{n \in \mathbf{N} \colon n \text{ prímszám}\}, \\ H &:= \{n \in \mathbf{N} \colon 0 < n \leq 10\}, \text{ ami az alaphalmaz.} \end{aligned}$$

Megoldás: Először soroljuk fel az A, B és C halmaz elemeit:

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}, \quad B = \{3, 6, 9\}, \quad C = \{2, 3, 5, 7\}.$$

Ezután következik $\overline{C} = \{1, 4, 6, 8, 9, 10\}$, és utána a zárójelek. Az uniót úgy célszerű kiszámolni, hogy a „nagyobb” halmazhoz hozzáadjuk a másik halmaz azon elemeit, amelyek a nagyobban nem találhatók:

$$A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10\}.$$

Metszet esetén a „kisebb” halmazból azokat az elemeket válogatjuk ki, amelyek a másik halmazban is megtalálhatók:

$$B \cap \overline{C} = \{6, 9\}.$$

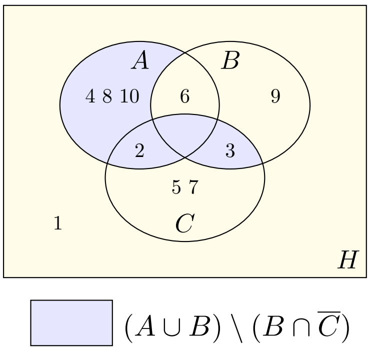
Ha a fenti két elemet kivesszük az $A \cup B$ halmazból a következő marad:

$$(A \cup B) \setminus (B \cap \overline{C}) = \{2, 3, 4, 8, 10\}.$$

Az előző feladat Venn-diagrammal is megoldható. Vegyük észre, hogy három halmaz 8 részre bontja a diagramot! Célunk az, hogy a H alaphalmaz minden elemét elhelyezzük a diagram megfelelő részén. Ekkor a következő eredményt kapjuk:

$$\begin{aligned} A \cap B \cap C &= \emptyset, & (A \cap B) \setminus C &= \{6\}, \\ (B \cap C) \setminus A &= \{3\}, & (C \cap A) \setminus B &= \{2\}, \\ A \setminus (B \cup C) &= \{4, 8, 10\}, & B \setminus (C \cup A) &= \{9\}, \\ C \setminus (A \cup B) &= \{5, 7\}, & \overline{A \cup B \cup C} &= \{1\}. \end{aligned}$$

A keresett Venn-diagram:



A középiskolában az intervallum fogalmával is megismerkedtünk. Az intervallumok azoknak a valós számoknak a halmaza, melyek két adott szám közé esnek, illetve a határoló számok is hozzátartozhatnak az intervallumhoz attól függően, hogy az adott oldalon az intervallum nyílt vagy zárt. Például

$$[-5, 2[= \{x \in \mathbf{R} \colon -5 \leq x < 2\},$$
$$]0, 4[= \{x \in \mathbf{R} \colon 0 < x < 4\}.$$

Határoló számok helyett végtelent vagy mínusz végtelent is írhatunk. Például

$$[1, \infty[= \{x \in \mathbf{R} \colon x \geq 1\},$$
$$]-\infty, 2[= \{x \in \mathbf{R} \colon x < 2\}.$$

A következő feladat intervallumokkal végzett halmazműveleteket mutat.

3. Feladat. *Legyen $A := [-5, 2[$ és $B :=]0, 4[$. Adjuk meg az $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ és az $\overline{A}$ halmazokat!*

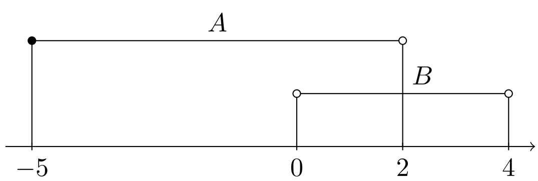
Megoldás:

a) $A \cup B = [-5, 4[$

b) $A \cap B =]0, 2[$

c) $A \setminus B = [-5, 0]$

d) $\overline{A} =]-\infty, -5[\cup [2, \infty[$

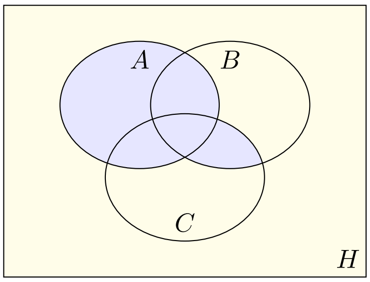


Azonosságokat úgy cáfolhatunk, hogy ellenpéldákat keresünk. Erre is alkalmas a Venn-diagram, mert a diagramon található alakzatok pontjaiból álló halmazok példának tekinthetők.

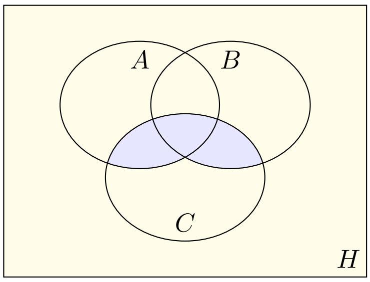
4. Feladat. *Igaz-e a következő egyenlőség? Válaszát indokolja!*

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$$

Megoldás: A Venn-diagramok alapján nem igaz az állítás.



$A \cup (B \cap C)$



$(A \cup B) \cap C$

A diagramok alapján úgy tűnik, hogy az $A \setminus C = \emptyset$ feltétel szükséges ahhoz, hogy az egyenlőség igaz legyen. A következő feladatban ezt igazoljuk.

5. Feladat. *Igazoljuk, hogy*

a) $(A \cup B) \cap C \subseteq A \cup (B \cap C)$,

b) Ha $A \setminus C = \emptyset$*, akkor* $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$.

Megoldás:

a) Ha $x \in (A \cup B) \cap C$, akkor $x \in (A \cup B)$ és $x \in C$. Ekkor $x \in A$ vagy $x \in B$, és $x \in C$.
Ha $x \in A$, akkor $x \in A \cup (B \cap C)$, hiszen $A \subseteq A \cup (B \cap C)$.
Ha $x \in B$ és $x \in C$, akkor $x \in B \cap C$, így $x \in A \cup (B \cap C)$, hiszen $B \cap C \subseteq A \cup (B \cap C)$. Ezzel az állítást igazoltuk.

b) Az a) pont szerint csak azt kell bebizonyítani, hogy ha $A \setminus C = \emptyset$, akkor $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap C$. Ha $x \in A \cup (B \cap C)$, akkor $x \in A$ vagy $x \in B \cap C$, így $x \in A$, vagy $x \in B$ és $x \in C$.
Ha $x \in A$, akkor $x \in A \cup B$, hiszen $A \subseteq A \cup B$, de az $A \setminus C = \emptyset$ feltétel miatt $x \in C$ is, hiszen ha $x \notin C$ és $x \in A$, akkor $x \in A \setminus C = \emptyset$, ami lehetetlen. Így $x \in (A \cup B) \cap C$.
Ha $x \in B$ és $x \in C$, akkor $x \in A \cup B$ és $x \in C$, hiszen $B \subseteq A \cup B$. Így $x \in (A \cup B) \cap C$. Ezzel az állítást igazoltuk.

A fenti feladat megoldásában alkalmazott módszerrel bebizonyíthatók a következő ú.n. **halmazműveleti tulajdonságok**.

Minden A, B és C halmaz esetén teljesül:

a) **Kommutativitás:** $A \cup B = B \cup A$ és $A \cap B = B \cap A$

b) **Asszociativitás:** $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ és $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

c) **Disztributivitás:** $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ és $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

d) **Üres halmazra:** $A \cup \emptyset = A$ és $A \cap \emptyset = \emptyset$

e) **Alaphalmazra:** $A \cup H = H$ és $A \cap H = A$

f) **Idempontencia:** $A \cup A = A$ és $A \cap A = A$

g) **Komplementerre:** $A \cup \overline{A} = H$ és $A \cap \overline{A} = \emptyset$

h) **Elnyelési:** $A \cup (A \cap B) = A$ és $A \cap (A \cup B) = A$

i) **De Morgan:** $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ és $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

j) **Különbségre:** $A \setminus B = A \cap \overline{B}$

Augustus De Morgan (1806-1871) egy Indiában született angol matematikus volt. George Boole mellet fontos szerepet játszott a matematikai logika fejlődésében, igyekezett a logikára alapozni a matematika más területeit. Ő tökéletesítette és elnevezte el a matematikai indukció módszerét.

A halmazműveleti tulajdonságokkal további azonosságokat igazolhatunk.

6. Feladat. *Igazoljuk a halmazműveleti tulajdonságok segítségével, hogy*

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C).$$

Megoldás: Írjuk az egyenlőségjelek fölé az alkalmazott halmazműveleti tulajdonságokat!

Az egyenlőség bal oldala:

$$A \setminus (B \cup C) \overset{(j)}{=} A \cap \overline{B \cup C} \overset{(i)\,(b)}{=} A \cap \overline{B} \cap \overline{C}.$$

Az egyenlőség jobb oldala:

$$(A \setminus B) \cap (A \setminus C) \overset{(j)}{=} (A \cap \overline{B}) \cap (A \cap \overline{C}) \overset{(b)\,(a)\,(f)}{=} A \cap \overline{B} \cap \overline{C}.$$

Így az egyenlőség mindkét oldala megegyezik.

7. Feladat. *Igazoljuk a halmazműveleti tulajdonságok segítségével, hogy ha $A \subseteq C$, akkor*

$$A \setminus B = A \cap (C \setminus B).$$

Megoldás: Ha $A \subseteq C$, akkor $A \cap C = A$. Így

$$A \cap (C \setminus B) \overset{\text{(j) (b)}}{=} (A \cap C) \cap \overline{B} = A \cap \overline{B} \overset{\text{(j)}}{=} A \setminus B.$$

8. Feladat. *Igazoljuk a halmazműveleti tulajdonságok segítségével, hogy $(A \setminus B) \cup C = (A \cup C) \setminus (B \cup C)$ akkor és csak akkor, ha $C = \emptyset$.*

Megoldás: Ha $C = \emptyset$, akkor az egyenlőség mindkét oldala $A \setminus B$-vel egyenlő, így az állítás teljesül.
Másrészt, ha az egyenlőség teljesül, akkor külön külön alakítjuk át mindkét oldalát. A bal oldal:

$$\begin{aligned}(A \setminus B) \cup C &= (A \cap \overline{B}) \cup C = (A \cup C) \cap (\overline{B} \cup C) = \\ &= [(A \cup C) \cap \overline{B}] \cup [(A \cup C) \cap C] = [(A \cup C) \cap \overline{B}] \cup C.\end{aligned}$$

A jobb oldal:

$$(A \cup C) \setminus (B \cup C) = (A \cup C) \cap \overline{B \cup C} = [(A \cup C) \cap \overline{B}] \cap \overline{C}.$$

Innen kétféleképpen indulhatunk tovább:

i) Indirekt módon tegyük fel, hogy $C \neq \emptyset$. Legyen $x \in C$. Ekkor x a bal oldal eleme, mert a bal oldalon levő halmaz tartalmazza a C halmazt. Azonban x nem lehet a jobb oldal eleme, hiszen $\overline{C}$ tartalmazza a jobb oldalon levő halmazt. Ez ellentmond annak a feltevésnek, hogy az egyenlőség teljesül.

ii) Ha két halmaz egyenlő, akkor a különbségük $\emptyset$. (Ez nyilvánvalóan fordítva nem igaz.) Tehát,

$$\begin{aligned}\emptyset &= \Big[[(A \cup C) \cap \overline{B}] \cup C\Big] \setminus \Big[[(A \cup C) \cap \overline{B}] \cap \overline{C}\Big] = \\ &= \Big[[(A \cup C) \cap \overline{B}] \cup C\Big] \cap \overline{\Big[[(A \cup C) \cap \overline{B}] \cap \overline{C}\Big]} = \\ &= \Big[[(A \cup C) \cap \overline{B}] \cup C\Big] \cap \Big[\overline{[(A \cup C) \cap \overline{B}]} \cup C\Big] = \\ &= \Big[[(A \cup C) \cap \overline{B}] \cap \overline{[(A \cup C) \cap \overline{B}]}\Big] \cup C = C.\end{aligned}$$

Azaz ha az egyenlőség teljesül, akkor $C = \emptyset$.

4. Relációk

Először bevezetjük a Descartes-szorzat fogalmát, de ehhez szükségünk van a rendezett pár precíz definíciójára. Mivel csak halmazokra támaszkodhatunk, ezért célszerű ezt a következő módon értelmezni.

9. Definíció. *Az a és b elemekből álló **rendezett párnak** nevezzük a következő halmazt:*

$$(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

A rendezett pár fogalmát nem tudtuk volna egyszerűbben értelmezni, például $\{a, b\}$ formában, hiszen $\{a, b\} = \{b, a\}$, mert egy halmaz elemei között nem állítunk fel sorrendet. Ezzel szemben a fenti definícióval már olyan ismert állítások igazolhatók, mint a következő.

1. Tétel. *Ha két rendezett pár esetén $(a, b) = (c, d)$ teljesül, akkor $a = c$ és $b = d$.*

Bizonyítás. Ha $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$, akkor két eset lehetséges.

I. $\{a\} = \{c\}$ és $\{a, b\} = \{c, d\}$. Ekkor $a = c$ és $\{a, b\} = \{a, d\}$, amiből következik, hogy $b = d$ vagy $b = a$. Az első esetben a tétel állítását kaptuk. A második esetben $\{a, a\} = \{a, d\}$ azaz $d = a = b$, így a tétel állítása teljesül.

II. $\{a\} = \{c, d\}$ és $\{a, b\} = \{c\}$. Ekkor $a = c = d$ és $c = a = b$, amiből rögtön a tétel állítása következik.

10. Definíció. *Az A és B halmazok **Descartes-szorzatának** nevezzük azt a halmazt, amelynek elemei a két halmaz elemeiből álló rendezett párok. Jele $A \times B$.*

A fenti definíciónak megfelelően, ha $A = \{a,\ b\}$ és $B = \{c,\ d,\ e\}$, akkor

$$A \times B := \{(a, c),\ (a, d),\ (a, e),\ (b, c),\ (b, d),\ (b, e)\}.$$

Vegyük észre, hogy ha az A halmaznak n, a B halmaznak m darab eleme van, akkor az $A \times B$ Descartes-szorzatnak nm darab eleme van!

Nyilvánvalóan a Descartes-szorzat nem felcserélhető, sőt:

$$A \times B = B \times A \quad \text{akkor és csak akkor, ha} \quad A = B.$$

A Descartes-szorzat három vagy több halmaz esetében is képezhető. Például

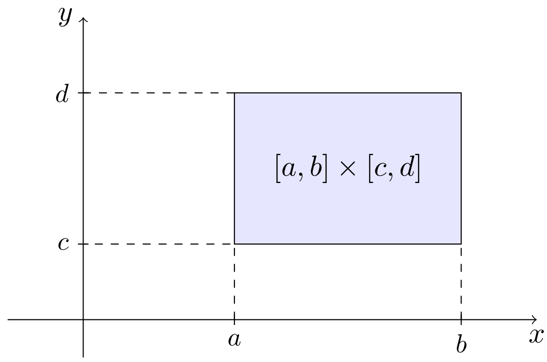
$$A \times B \times C = A \times (B \times C).$$

9. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy* $\{a\} \times \{a\} = \Big\{\{\{a\}\}\Big\}$ *!*

Megoldás: A definíció alapján

$$\{a\} \times \{a\} = \{(a,a)\} = \Big\{\{\{a\},\{a,a\}\}\Big\} = \Big\{\{\{a\},\{a\}\}\Big\} = \Big\{\{\{a\}\}\Big\}$$

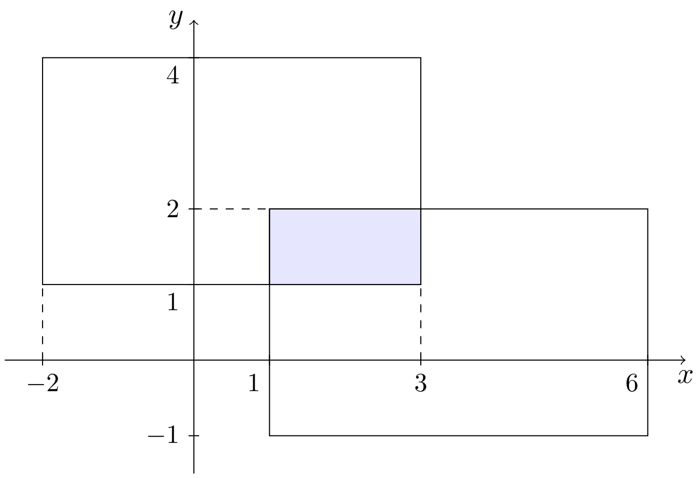
Az $A \times B$ Descartes-szorzatot gyakran célszerű koordinátarendszerben ábrázolni úgy, hogy az A halmazt az x tengelyre, a B halmazt az y tengelyre helyezzük. Főleg, ha a két halmaz intervallum.



10. Feladat. *Legyen* $A := [-2,3]$, $B := [1,4]$, $C := [1,6]$ *és* $D := [-1,2]$. *Adja meg az* $(A \times B) \cap (C \times D)$ *halmazt!*

Megoldás: Az ábra segítségével látható, hogy

$$(A \times B) \cap (C \times D) = [1,3] \times [1,2].$$



René Descartest (1596-1650) francia filozófus, természettudós, matematikus, a racionalizmus hirdetője. Tőle származik a gyakran idézett mondás:

„Gondolkodom, tehát vagyok”.

1637-ben jelent meg „Értekezések a módszerről” című könyve, amely lendületet adott az analitikus geometria fejlődésének. Műveiben azonban még nem szerepel a koordináta rendszer, amely ma az ő nevét viseli. Ő még csak egyetlen tengellyel dolgozott, és ezen sem vette figyelembe a negatív számokat, bár már számolt is velük, de „hamis” számoknak nevezte őket.

Descartes volt az, aki bevezette az egységszakasz fogalmát és a negyedik arányos szerkesztést (Párhuzamos szelők tétele). Ő kezdte el a hatványkitevők használatát, és $a \cdot a$ helyett a^2-t írt.

A tételekben, definíciókban, feladatokban gyakran találkozunk olyan kifejezésekkel, mint a „van olyan”, „bármely”, „ha. . . , akkor. . . ”, stb. Sokkal tömörebben tudjuk állításainkat leírni, ha ezek helyett úgynevezett **logikai jeleket** alkalmazunk. Ezek a következők:

- „$\exists$” jelentése „létezik olyan” vagy „van olyan”,
- „$\forall$” jelentése „bármely” vagy „minden egyes”,
- „ $\Longrightarrow$ ” (implikáció) jelentése „-ból következik, hogy”,
- „ $\Longleftrightarrow$ ” (ekvivalencia) jelentése „akkor és csak akkor”.

11. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy*

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap C)\ !$$

Megoldás:

$$\begin{aligned}
& x \in (A \times B) \cap (C \times D) \\
& \quad \Longleftrightarrow\ x \in (A \times B) \text{ és } x \in (C \times D) \\
& \quad \Longleftrightarrow\ x = (a, b),\ \text{ahol } a \in A,\ a \in C,\ b \in B,\ b \in D \\
& \quad \Longleftrightarrow\ x = (a, b),\ \text{ahol } a \in A \cap C, \text{ és } b \in B \cap C \\
& \quad \Longleftrightarrow\ x \in (A \cap C) \times (B \cap C)
\end{aligned}$$

Az előző eredmény jól szemléltethető a 10. Feladattal.

12. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy*

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C) \text{ !}$$

Megoldás:

$$\begin{aligned}
&x \in (A \cup B) \times C \\
&\iff x = (a,b),\ \text{ahol } a \in A \cup B \text{ és } b \in C \\
&\iff x = (a,b),\ \text{ahol } a \in A \text{ vagy } a \in B, \text{ és } b \in C \\
&\iff x = (a,b),\ \text{ahol } a \in A \text{ és } b \in C, \text{ vagy } a \in B \text{ és } b \in C \\
&\iff x \in A \times C \text{ vagy } x \in B \times C \\
&\iff x \in (A \times C) \cup (B \times C)
\end{aligned}$$

A Descartes-szorzat után bevezetjük a reláció fogalmát. A reláció nem más, mint két halmaz Descartes-szorzatának részhalmaza.

11. Definíció. *Legyen A és B két adott halmaz. Ha $\varrho \subseteq A \times B$, akkor azt mondjuk, hogy ϱ egy az A, B halmazpáron értelmezett* ***reláció****, vagy A és B közötti* ***hozzárendelés****. Ha $A = B$, csak annyit mondunk, hogy ϱ egy az A halmazon értelmezett reláció.*

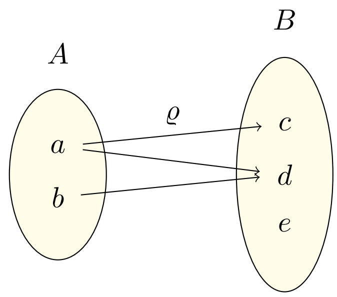
Ha $(a, b) \in \varrho$, akkor azt mondjuk, hogy a relációban áll b-vel ϱ szerint, vagy ϱ a-hoz hozzárendeli b-t, és ezt gyakran $a\varrho b$-vel jelöljük.

Például a fenti definíciónak megfelelően, ha $A = \{a, b\}$ és $B = \{c, d, e\}$, akkor a következő módon értelmezhetünk egy az A, B halmazpáron értelmezett relációt:

$$\varrho = \{(a, c), (a, d), (b, d)\}.$$

Ekkor $a\varrho c$ és $a\varrho d$, de $a\not\varrho e$ (vagyis $(a, e) \notin \varrho$).

A relációkat különböző módon szemléltethetjük. Az egyik megszokott lehetőség a két halmaz „átnyilazása”, amely a relációk egy megadási formája is lehet. Például a fenti reláció a következőképpen ábrázolható.



A fenti ábrázolási mód már hasonlít ahhoz, ahogy középiskolában a függvény fogalmát szemléltettük. Ez nem meglepő, hiszen minden függvény egy hozzárendelés, bár nem minden hozzárendelés egy függvény, ahogy a fenti ábrán látható. A függvényekkel a tananyag következő része foglalkozik.

12. Definíció. *Legyen ϱ egy az A, B halmazpáron értelmezett reláció. A ϱ reláció* ***értelmezési tartománya*** *a*

$$D_\varrho := \{a \in A\colon \textit{van olyan } b \in B,\ \textit{hogy } (a, b) \in \varrho\}$$

halmaz, és ***értékkészlete*** *az*

$$R_\varrho := \{b \in B\colon \textit{van olyan } a \in A,\ \textit{hogy } (a, b) \in \varrho\}$$

halmaz. A ϱ reláció ***inverzét*** *a*

$$\varrho^{-1} := \{(b, a) \in B \times A\colon (a, b) \in \varrho\}$$

módon értelmezzük.

Könnyen belátható, hogy az előző példánál: $D_\varrho = \{a,\, b\} = A$, $R_\varrho = \{c,\, d\}$ és $\varrho^{-1} = \{(c, a),\, (d, a),\, (d, b)\}$.

13. Feladat. *Legyen $A = \{-5,\, -3,\, -1,\, 3,\, 5\}$ és $B = \{-5,\, -2,\, 0,\, 2,\, 3,\, 5,\, 7\}$. Határozzuk meg az alábbi A, B halmazpáron értelmezett relációk értelmezési tartományát, értékkészletét és inverzét!*

a) $a\varrho b$ akkor és csak akkor, ha $b - a = 3$,

b) $a\varrho b$ akkor és csak akkor, ha $a^2 = b^2$,

c) $a\varrho b$ akkor és csak akkor, ha $ab = 0$,

d) $a\varrho b$ akkor és csak akkor, ha $a + b > 9$.

Megoldás: Könnyű felsorolni a reláció elemeit és megadni a keresett halmazokat.

a) $\varrho = \{(-5, -2),\, (-3, 0),\, (-1, 2)\}$, $\quad D_\varrho = \{-5,\, -3,\, -1\}$,
$R_\varrho = \{-2,\, 0,\, 2\}$, $\quad \varrho^{-1} = \{(-2, -5),\, (0, -3),\, (2, -1)\}$.

b) $\varrho = \{(-5, -5),\, (-5, 5),\, (5, -5),\, (5, 5),\, (-3, 3),\, (3, 3)\}$,
$D_\varrho = \{-5,\, -3,\, 3,\, 5\}$, $\quad R_\varrho = \{-5,\, 3,\, 5\}$,
$\varrho^{-1} = \{(-5, -5),\, (5, -5),\, (-5, 5),\, (5, 5),\, (3, -3),\, (3, 3)\}$.

c) $\varrho = \{(-5, 0),\, (-3, 0),\, (-1, 0),\, (3, 0),\, (5, 0)\}$, $\quad D_\varrho = A$, $\quad R_\varrho = \{0\}$,
$\varrho^{-1} = \{(0, -5),\, (0, -3),\, (0, -1),\, (0, 3),\, (0, 5)\}$.

d) $\varrho = \{(3, 7),\, (5, 5),\, (5, 7)\}$, $\quad D_\varrho = \{3,\, 5\}$, $\quad R_\varrho = \{5,\, 7\}$,
$\varrho^{-1} = \{(7, 3),\, (5, 5),\, (7, 5)\}$.

14. Feladat. *Határozzuk meg az alábbi A, B halmazpáron értelmezett relációk értelmezési tartományát, értékkészletét és inverzét!*

a) $A = \mathbf{R}$, $B = \mathbf{R}$ *és* $a\varrho b$ *akkor és csak akkor, ha* $a^2 + b^2 = 1$,

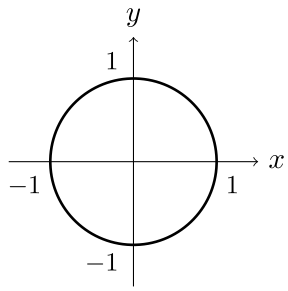
b) $A = \mathbf{R}$, $B = \mathbf{R}$ *és* $a\varrho b$ *akkor és csak akkor, ha* $a = b^2$.

Megoldás:

a) Koordinátageometriai ismereteinkből tudjuk, hogy az $x^2+y^2 = 1$ az origó középpontú egységsugarú kör egyenlete. Ezért

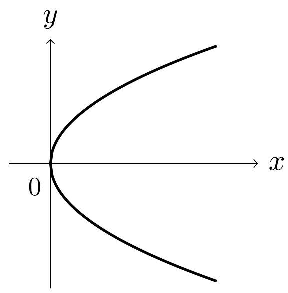
$$D_\varrho = R_\varrho = \{a \in \mathbf{R}\colon -1 \le a \le 1\},$$

és $\varrho^{-1} = \varrho$.



b) Az $x = y^2$ egyenletű parabola grafikonja alapján:

$$D_\varrho = \{a \in \mathbf{R}\colon a \ge 0\}$$
$$R_\varrho = \mathbf{R}$$
$$\varrho^{-1} = \{(a, b)\colon a \in \mathbf{R},\ b = a^2\}$$



A relációk között műveletet is értelmezhetünk.

13. Definíció. *Legyen ϱ egy az A, B és σ egy a C, D halmazpáron értelmezett reláció. Azt a relációt, amely az A, D halmazpáron értelmezett és*

$$\sigma \circ \varrho := \{(a, d)\colon a \in A,\ d \in D,\ \text{és } \exists c \in B \cap C,\ \text{hogy } a\varrho c \text{ és } c\sigma d\}$$

módon adunk meg a ϱ és σ ***kompozíciójának****, vagy* ***összetett relációjának*** *nevezzük.*

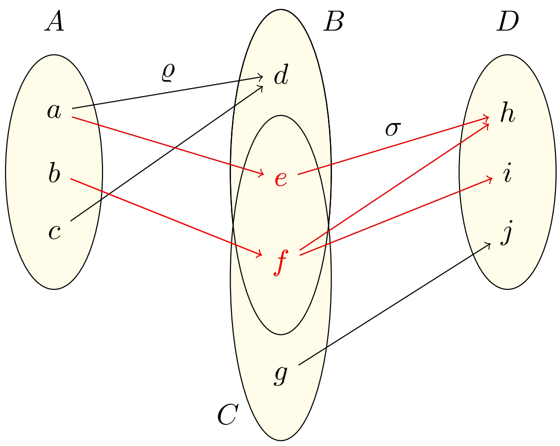
Más szavakkal: azokat a rendezett párokat keressük, amelyeknek első komponense az A halmazból, második komponense a D halmazból való, és mindkét komponens sajátos módon relációban van a $B \cap C$ halmaz egyik elemével.

A következő egyszerű példa jól illusztrálja a relációk kompozícióját. Legyen

$$A = \{a,\, b,\, c\}, \qquad B = \{d,\, e,\, f\},$$
$$C = \{e,\, f,\, g\}, \qquad D = \{h,\, i,\, j\},$$

továbbá

$$\varrho = \{(a,d),\, (a,e),\, (b,f),\, (c,d)\}, \quad \text{és}$$
$$\sigma = \{(e,h),\, (f,h),\, (f,i),\, (g,j)\}.$$



$$\sigma \circ \varrho := \{(a,h),\, (b,h),\, (b,i)\}$$

Véges halmazok esetén érdemes végigmenni a $B \cap C$ halmaz elemein, hogy megtaláljuk az összes „utat” A-tól D-ig. Jelen esetben három különböző utat találtunk, ezek a relációk kompozícióját adják.

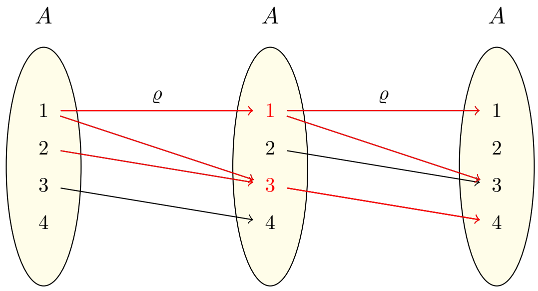
Lehetséges, hogy $\sigma = \varrho$. Ekkor a $\varrho \circ \varrho$ relációt a ϱ^2 jelöléssel rövidíthetjük, azaz $\varrho^2 := \varrho \circ \varrho$. Hasonlóan $\varrho^3 := \varrho \circ \varrho^2$, $\varrho^4 := \varrho \circ \varrho^3$ és így tovább.

15. Feladat. *Legyen* $A := \{1,\, 2,\, 3,\, 4\}$*, valamint* ϱ *és* σ *az* A *halmazon értelmezett reláció úgy, hogy*

$$\varrho := \{(1,1),\, (1,3),\, (2,3),\, (3,4)\}$$
$$\sigma := \{(2,3),\, (3,1),\, (3,3),\, (4,4)\}.$$

Adjuk meg a $\sigma^{-1} \circ \varrho^2$ *reláció elemeit!*

Megoldás: Először külön-külön meghatározzuk a ϱ^2 és a σ^{-1} reláció elemeit. Az első esetben:

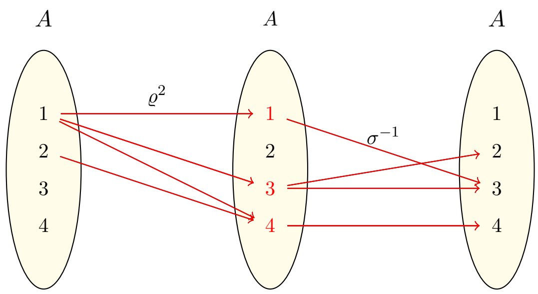


$$\varrho^2 := \{(1,1),\ (1,3),\ (1,4),\ (2,4)\}$$

A σ reláció inverzének kiszámítása egyszerűbb, elég megcserélni a benne szereplő rendezett párokban a sorrendet.

$$\sigma^{-1} := \{(3,2),\ (1,3),\ (3,3),\ (4,4)\}.$$

Végül megadhatjuk a keresett reláció elemeit.



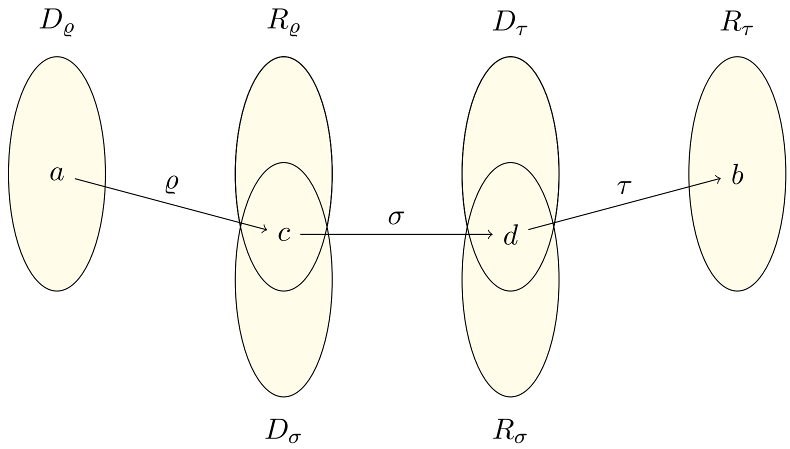
$$\sigma^{-1} \circ \varrho^2 := \{(1,3),\ (1,2),\ (1,4),\ (2,4)\}$$

Könnyen igazolható, hogy a relációk kompozíciója nem felcserélhető művelet, ennek ellenére asszociatív.

2. Tétel. *A relációk kompozíciója asszociatív művelet, vagyis*

$$(\tau \circ \sigma) \circ \varrho = \tau \circ (\sigma \circ \varrho).$$

Bizonyítás. A definíció alapján $(a, b) \in (\tau \circ \sigma) \circ \varrho \iff a \in D_\varrho$, $b \in R_{\tau \circ \sigma}$ és $\exists c \in R_\varrho \cap D_{\tau \circ \sigma}$, hogy $(a, c) \in \varrho$ és $(c, b) \in \tau \circ \sigma$.
Másrészt $(c, b) \in \tau \circ \sigma \iff c \in D_\sigma$, $b \in R_\tau$ és $\exists d \in R_\sigma \cap D_\tau$, hogy $(c, d) \in \sigma$ és $(d, b) \in \tau$.



Az előzőekből következik, hogy $(a, d) \in \sigma \circ \varrho$, hiszen $a \in D_\varrho$, $d \in R_\sigma$ (mivel $d \in R_\sigma \cap D_\tau$), $c \in R_\varrho \cap D_\sigma$ (mivel $c \in D_\sigma$ és $c \in R_\varrho \cap D_{\tau \circ \sigma}$, azaz $c \in R_\varrho$), továbbá $(a, c) \in \varrho$ és $(c, d) \in \sigma$.
Tehát $a \in D_{\sigma \circ \varrho}$ és $d \in R_{\sigma \circ \varrho}$. Így $(a, b) \in \tau \circ (\sigma \circ \varrho)$, hiszen $a \in D_{\sigma \circ \varrho}$, $b \in R_\tau$, $d \in R_{\sigma \circ \varrho} \cap D_\tau$ (mivel $d \in R_{\sigma \circ \varrho}$ és $d \in R_\sigma \cap D_\tau$, azaz $d \in D_\tau$), továbbá $(a, d) \in \sigma \circ \varrho$ és $(d, b) \in \tau$.

Így azt bizonyítottuk be, hogy

$$(\tau \circ \sigma) \circ \varrho \subseteq \tau \circ (\sigma \circ \varrho).$$

Analóg módon bizonyítható a fordított tartalmazás, amiből rögtön következik az egyenlőség. Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

3. Tétel. *Tetszőleges ϱ és σ reláció esetén:*

$$(\sigma \circ \varrho)^{-1} = \varrho^{-1} \circ \sigma^{-1}.$$

Bizonyítás. $(a, b) \in (\sigma \circ \varrho)^{-1} \iff (b, a) \in \sigma \circ \varrho$. A definíció alapján ez akkor és csak akkor teljesül, ha $b \in D_\varrho$, $a \in R_\sigma$ és $\exists c \in R_\varrho \cap D_\sigma$, hogy $(b, c) \in \varrho$ és $(c, a) \in \sigma$.

Mivel $D_\varrho = R_{\varrho^{-1}}$, $R_\varrho = D_{\varrho^{-1}}$, $D_\sigma = R_{\sigma^{-1}}$ és $R_\sigma = D_{\sigma^{-1}}$, az előző állítás akkor és csak akkor igaz, ha $a \in D_{\sigma^{-1}}$, $b \in R_{\varrho^{-1}}$, és $\exists c \in R_{\sigma^{-1}} \cap D_{\varrho^{-1}}$, hogy $(a, c) \in \sigma^{-1}$ és $(c, b) \in \varrho^{-1}$, vagyis $(a, b) \in \varrho^{-1} \circ \sigma^{-1}$.

5. Függvények

Az előző részben tisztáztuk a hozzárendelés fogalmát. A továbbiakban az egyértelműségre helyezzük a hangsúlyt.

14. Definíció. *Akkor mondjuk, hogy az A, B halmazpáron értelmezett f reláció* ***függvény***†*, ha $(a, b) \in f$ és $(a, c) \in f$, akkor $b = c$.*

†Gyakran leképezés, operátor vagy transzformáció elnevezést is kap.

Descartes volt az, aki az első függvényfogalmat megadta az XVII század végén, de a függvény elnevezést Leibnitz adta. Euler idejében még csak az lehetett függvény, ami a négy alapműveletet, hatványozást, gyökvonást, sorba fejtést, differenciálást vagy integrálást tartalmazta.

A ma is elfogadott függvényfogalmat lényegében Lejeune Dirichlet (1805 - 1859) vezette be, aki német matematikus és fizikus volt. Munkássága még kiterjedt a számelmélet továbbfejlesztésére és a Fourier-sorok elméletének megalapozására is. Kapcsolatot tartott fenn korának minden jelentős matematikusával, de a hétköznapi dolgokban igazi szórakozott professzor hírében állt.

A fenti definíció azt jelenti, hogy az f reláció akkor és csak akkor függvény, ha egyértelmű, vagyis minden $a \in D_f$ elemhez egyetlen olyan $b \in R_f$ elem létezik, amelyre $(a, b) \in f$. Ekkor azt mondjuk, hogy b az a **elem f-szerinti képe**, hozzárendelt eleme vagy helyettesítési értéke, továbbá a a b **elem f-szerinti ősképe**. Az $(a, b) \in f$, vagy afb jelölés helyett az $f(a) = b$ jelölést szokás alkalmazni.

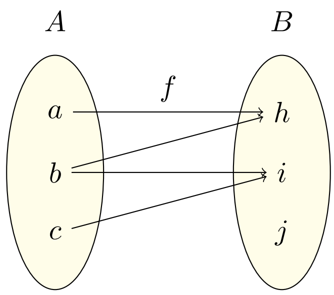
A fenti definíciónak megfelelően az

$$A = \{a,\ b,\ c\}, \quad B = \{h,\ i,\ j\}$$

halmazpáron értelmezett reláció nem lesz függvény, ha

$$f = \{(a, h),\ (b, h),\ (b, i),\ (c, i)\}.$$

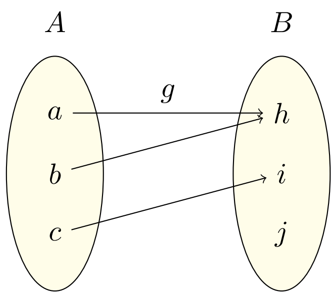
Tudniillik, $(b, h) \in f$, $(b, i) \in f$, de $h \neq i$.



Azonban, a

$$g = \{(a, h),\ (b, h),\ (c, i)\}.$$

reláció már függvény. Nem követelmény, hogy a B elemei hányszor szerepeljenek a függvényben.



Akkor mondjuk, hogy f az A halmazon értelmezett B-értékű függvény, ha $D_f = A$ és $R_f \subseteq B$. Ekkor az $f\colon A \to B$ jelölést alkalmazzuk és azt mondjuk, hogy ***f* az *A*-t *B*-be képező függvény**. Ha még $R_f = B$ is teljesül, akkor azt mondjuk, hogy ***f* az *A*-t *B*-re képező függvény**.

16. Feladat. *Döntsük el, hogy az alábbi A, B halmazpáron értelmezett relációk közül melyek függvények!*

a) $A = \{0,\ 2,\ 4\}$, $B = \{-1,\ 4,\ 6\}$, *és* $(a, b) \in f \iff ab = 0$,

b) $A = \{-1,\ 4,\ 6\}$, $B = \{0,\ 2,\ 4\}$, *és* $(a, b) \in f \iff ab = 0$,

c) $A = \mathbf{R}$, $B = \mathbf{R}$ *és* $(a, b) \in f \iff b = a^2$,

d) $A = \mathbf{R}$, $B = \mathbf{R}$ *és* $(a, b) \in f \iff b^2 = a^2$,

e) $A = [0, \infty[$, $B = [0, \infty[$ *és* $(a, b) \in f \iff b^2 = a^2$.

Megoldás:

a) Ahhoz, hogy egy reláció ne legyen függvény, elegendő két olyan elempárt találni, amelynek első komponensei egyenlők, de a második komponensei nem egyenlők. $(0, 4) \in f$ és $(0, 6) \in f$, ezért a reláció nem függvény.

b) $f = \{(-1, 0),\ (4, 0),\ (6, 0)\}$, mivel nincs két olyan elempár, amelynek első komponensei egyenlők, ezért a reláció függvény.

c) A definíció alapján ha $(a, b) \in f$ és $(a, c) \in f$, akkor $b = a^2$ és $c = a^2$, amiből következik, hogy $b = c$, ezért a reláció függvény.

d) $(1, -1) \in f$ és $(1, 1) \in f$, ezért a reláció nem függvény.

e) Ha a és b nem negatív számok, akkor $b^2 = a^2 \iff b = a$. Így ha $(a, b) \in f$ és $(a, c) \in f$, akkor $b = a$ és $c = a$, amiből következik, hogy $b = c$, ezért a reláció függvény.

Az előző feladat e) pontjában megadott függvényt az $f(a) = a$ szabállyal is megadhattuk volna. Ha még $A = D_f$ is teljesül, akkor azt mondjuk, hogy f az A halmazon értelmezett **identikus függvény**, amit I_A-val szokás jelölni.

A függvény fogalmából következik, hogy két függvény egyenlő, ha értelmezési tartományuk egyenlő és ott ugyanazokat az értékeket veszik fel. A függvényeket általában az értelmezési tartományukkal és a hozzárendelési szabállyal (pl. képlettel) szokták megadni. Gyakran az értelmezési tartomány nincs feltüntetve, ilyenkor a legbővebb halmazt kell tekinteni, amelyre a megadott szabálynak értelme van.

17. Feladat. *Adja meg a legbővebb halmazt, ahol a következő függvények értelmezhetők!*

a) $f(x) = x^2 - 1$, b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$, c) $f(x) = \sqrt{x^2-1}$.

Megoldás:

a) Nyilván $D_f = \mathbf{R}$, hiszen $x^2 - 1$ minden x valós szám esetén értelmezhető.

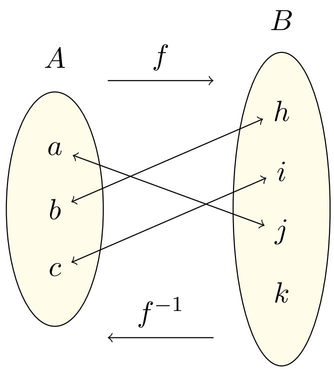
b) $x^2 - 1 \neq 0$, így $x \neq \pm 1$, ezért $D_f = \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$.

c) $x^2 - 1 \geq 0$, ezért $D_f =]-\infty, -1] \cup [1, \infty[$.

15. Definíció. *Akkor mondjuk, hogy az f függvény* ***invertálható****, ha az f^{-1} reláció függvény. Ekkor az f^{-1} függvényt az f* ***inverz függvényének*** *nevezzük.*

Az invertálható függvényeket **egy-egyértelmű** függvényeknek is szokták nevezni. Ez azt jelenti, hogy egyértelműek, mert függvények, és még „visszafelé” is egyértelműek. Tehát tetszőleges $a, b \in D_f$ esetén:

$$f(a) = f(b) \quad \Longrightarrow \quad a = b.$$



A következőképpen szokás még elnevezni a függvények ilyen jellegű tulajdonságait.

16. Definíció. *Azt mondjuk, hogy egy függvény* ***injektív****, ha egy-egyértelmű. Ha $f\colon A \to B$ olyan függvény, hogy $R_f = B$, akkor a függvényt* ***szürjektívnek*** *nevezzük. Ha egy függvény injektív és szürjektív egyszerre, akkor* ***bijektív vagy kölcsönösen egyértelmű*** *függvénynek mondjuk.*

A fenti definícióból következik, hogy az $f\colon A \to R_f$ függvény mindig szürjektív. A gond csak az, hogy az R_f halmaz megállapítása nehéz feladat lehet, ezért a függvény megadásakor egy bővebb halmazt szokás megadni.

Ha az f függvény invertálható, $x \in D_f$, $y \in R_f$ és x f szerinti képe y, vagyis $y = f(x)$, akkor y f^{-1} szerinti képe x. Hogyan határozhatjuk meg az inverz függvényt? Ha az f függvény valamilyen képlettel adott, akkor érdemes az x és y szerepét felcserélni. Az $x = f(y)$ egyenletből kiindulva, ekvivalens átalakításokkal meg lehet próbálni kifejezni y-t az x-ből és az új képlet adja meg a függvény inverzét.

18. Feladat. *Döntsük el, hogy az alábbi függvények közül melyek invertálhatók és adjuk meg az inverzeket!*

a) $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 3x + 5$,

b) $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$,

c) $f\colon [0, \infty[\to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$,

d) $f\colon \mathbf{R} \setminus \{-1\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$.

Megoldás: A függvény akkor invertálható, ha $f(a) = f(b)$ egyenlőségből következik, hogy $a = b$.

a) Ha $3a + 5 = 3b + 5$, akkor $a = b$, így invertálható. Ha $x = 3y + 5$, akkor $y = \dfrac{x-5}{3}$. Ezért

$$f^{-1}\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad f^{-1}(x) = \frac{x-5}{3}.$$

b) Ha $a^2 = b^2$, akkor $a = \pm b$, így nem invertálható, hiszen $1^2 = (-1)^2$, de $1 \neq -1$.

c) Ha $a^2 = b^2$, akkor $a = \pm b$, de most $a, b \geq 0$, amiből következik, hogy $a = b$, így invertálható. Ha $x = y^2$, akkor $y = \sqrt{x}$, amennyiben $x \geq 0$. Ezért

$$f^{-1}\colon [0, \infty[\to \mathbf{R}, \quad f^{-1}(x) = \sqrt{x}.$$

d) Ha $\dfrac{a-1}{a+1} = \dfrac{b-1}{b+1}$ végigszorozhatunk $a+1$-gyel és $b+1$-gyel, és így

$$ab + a - b - 1 = ab - a + b - 1 \quad \Longrightarrow \quad 2a = 2b \quad \Longrightarrow \quad a = b,$$

vagyis invertálható. Ha $x = \dfrac{y-1}{y+1}$ végigszorozhatunk $y+1$-gyel:

$$xy + x = y - 1 \quad \Longrightarrow \quad (x-1)y = -1 - x \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{x+1}{1-x},$$

ha $x \neq 1$. Ezért

$$f^{-1}\colon \mathbf{R} \setminus \{1\} \to \mathbf{R}, \quad f^{-1}(x) = \frac{x+1}{1-x}.$$

Az előző feladatban azt tapasztaltuk, hogy egy nem invertálható függvény értelmezési tartományát leszűkíthetjük úgy, hogy a függvény már invertálható legyen.

Ezért szükségünk van a következő fogalomra.

17. Definíció. *Legyen X, Y, Z adott halmazok, $X \subseteq Y$, továbbá $f: X \to Z$ és $g: Y \to Z$ úgy, hogy $f(x) = g(x)$ minden $x \in X$ esetén. Ekkor azt mondjuk, hogy az f függvény a **g függvény A halmazra való leszűkítése** és a g függvény az **f függvény B halmazra való kiterjesztése**.*

Az f^{-1} jelölésmódról fontos megjegyezni, hogy a halmazok függvény szerinti ős-képénél is szerepelni fog, de nem lesz zavaró, hiszen ha egy függvény invertálható, akkor adott halmaz függvény szerinti ősképe megegyezik a halmaz inverz függvény szerinti képével (lásd a 6. részt és a 8. Tételt).

Két függvény kompozícióját nem kell külön értelmezni, hiszen már megtettük a relációk esetében (lásd a 13. Definíciót). Azonban nem triviális tény, hogy két függvény kompozíciója szintén függvény.

4. Tétel. *Ha az f és a g reláció függvény, akkor az $f \circ g$ reláció szintén függvény.*

Bizonyítás. Legyen g az A, B és f a C, D halmazpáron értelmezett reláció, továbbá $a \in A$ és $b, c \in D$, hogy $(a, b) \in f \circ g$ és $(a, c) \in f \circ g$. Ekkor van olyan $d_1, d_2 \in B \cap C$ úgy, hogy

$$(a, d_1) \in g, \quad (d_1, b) \in f, \quad (a, d_2) \in g, \quad (d_2, c) \in f.$$

Mivel g függvény, ezért $d_1 = d_2$. Jelölje d ezt a közös elemet, vagyis $(d, b) \in f$ és $(d, c) \in f$. Mivel f függvény, így $b = c$. Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

Az előző tétel értelmében a következő definíciót adhatjuk meg.

18. Definíció. *Legyen adott az f és g függvény. Az $f \circ g$ kompozíciót **összetett függvénynek** nevezzük. Így*

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \qquad \text{minden } x \in D_{f \circ g} \text{ esetén.}$$

*Ekkor g-t **belső függvénynek** és f-et **külső függvénynek** nevezzük.*

A 7. részben folytatjuk az összetett függvények tanulmányozását, mert ehhez meg kell tudnunk határozni a függvények halmazok szerinti képét és ősképét.

6. Halmazok függvény szerinti képe és inverzképe

A következő fogalommal az elemek képét és ősképét kiterjesztjük halmazok esetére.

19. Definíció. *Legyen adott az $f\colon X \to Y$ függvény, $A \subseteq X$ és B egy tetszőleges halmaz. Az A* ***halmaz f szerinti képe*** *az*

$$f(A) := \{b \in Y : \exists a \in A,\ \text{hogy } b = f(a)\}$$

halmaz. A B ***halmaz f szerinti inverzképe*** *vagy* ***ősképe*** *az*

$$f^{-1}(B) := \{a \in X : f(a) \in B\}$$

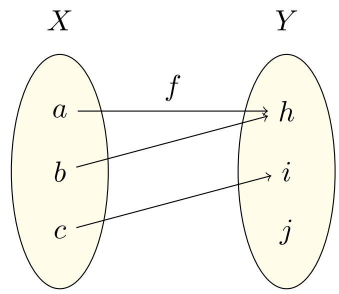
halmaz.

Például az $f\colon \{a,\, b,\, c\} \to \{h,\, i,\, j\}$,

$$f = \{(a,h),\ (b,h),\ (c,i)\}$$

függvény esetén könnyen igazolható, hogy

$$f(\{a,\, b\}) = \{h\},$$
$$f^{-1}(\{h,\, j\}) = \{a,\, b\}.$$



Fontos megjegyezni, hogy a definíció értelmében egy halmaz képe csak akkor határozható meg, ha a halmaz része a függvény értelmezési tartományának, míg a halmazok ősképe minden esetben meghatározható.

A következőkben néhány példát mutatunk be, melyekben valós számokból álló halmazok függvény szerinti képét és ősképét határozunk meg. A feladatok megoldásában nagy segítséget nyújt a függvény grafikonjának ismerete, de a grafikonok elkészítése általában nem egyszerű feladat. Ezért csak olyan függvények jöhetnek szóba, melyeket a középiskolában tanult függvénytranszformáció segítségével kapunk ismert elemi függvények grafikonjából.

19. Feladat. *Legyen $A := \{-2,\, -1,\, 3\}$, $B := [-2, 2[$ és $f(x) := |x-1| - 1$. Adjuk meg a halmazok függvény szerinti képét és ősképét!*

Megoldás: Összesen négy halmazt kell meghatározni.

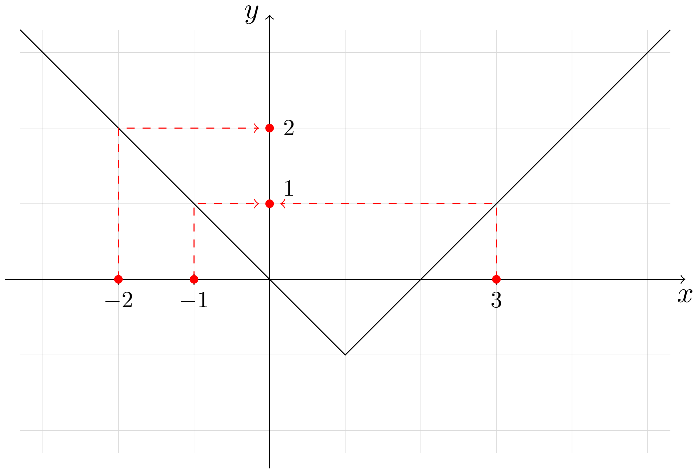
1) Határozzuk meg az A halmaz függvény szerinti képét, azaz az $\boldsymbol{f(A)}$ halmazt!
Mivel az A halmaz véges, így elegendő minden A-beli értéket behelyette-

síteni a függvény képletébe, hogy megkapjuk a kíván értékeket:

$$\begin{aligned} f(-2) &= |-2-1|-1 = 2,\\ f(-1) &= |-1-1|-1 = 1,\\ f(3) &= |3-1|-1 = 1. \end{aligned}$$

Ezért $f(A) = \{1, 2\}$.

A feladat grafikusan is megoldható. Ábrázoljuk az $f(x) := |x-1|-1$ függvényt! A függvény grafikonját függvénytranszformáció alkalmazásával kapjuk az abszolút érték függvényből. Helyezzük el az A halmaz értékeit az x számegyenesen és egyenként határozzunk meg a helyettesítési értéküket!



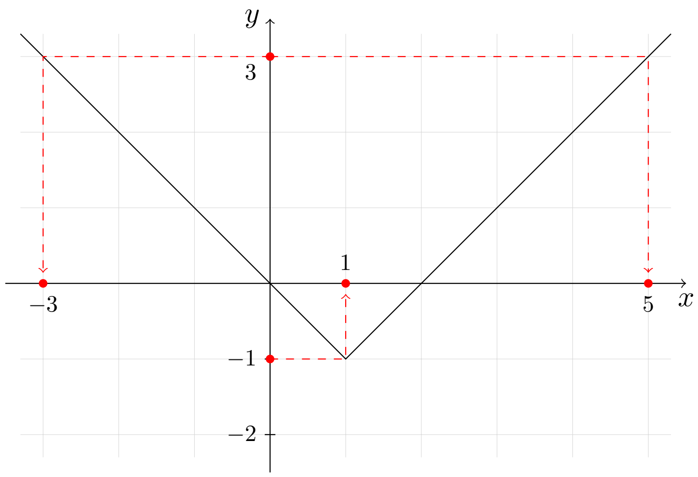
$f(A) = \{1, 2\}$

2) Határozzuk meg az A halmaz függvény szerinti ősképét, azaz az $\boldsymbol{f^{-1}(A)}$ halmazt!
Azokat az x valós számokat keressük, amelyek a függvény képletébe behelyettesítve A halmazbeli értéket adnak, azaz $f(x) \in A$. Mivel az A halmaz véges, így elegendő véges sok egyenletet megoldani:

$$\begin{aligned} &|x-1|-1 = f(x) = -2, && |x-1| = -1, && \text{nincs megoldása},\\ &|x-1|-1 = f(x) = -1, && |x-1| = 0, && x = 1,\\ &|x-1|-1 = f(x) = 3, && |x-1| = 4, && x = -3, \quad x = 5. \end{aligned}$$

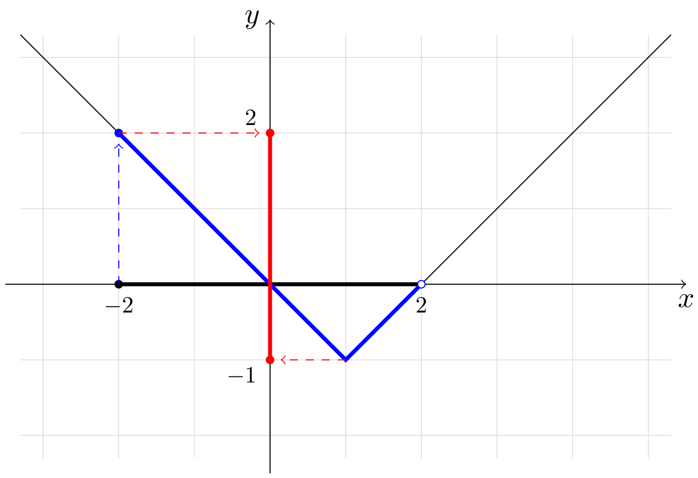
Ezért
$$f^{-1}(A) = \{-3, 1, 5\}.$$

A feladat grafikusan is megoldható. A függvény ábrázolása után helyezzük el az A halmaz értékeit az y számegyenesen és keressük meg egyenként azokat az x pontokat, amelyek függvény szerinti értékük A-beli pont!



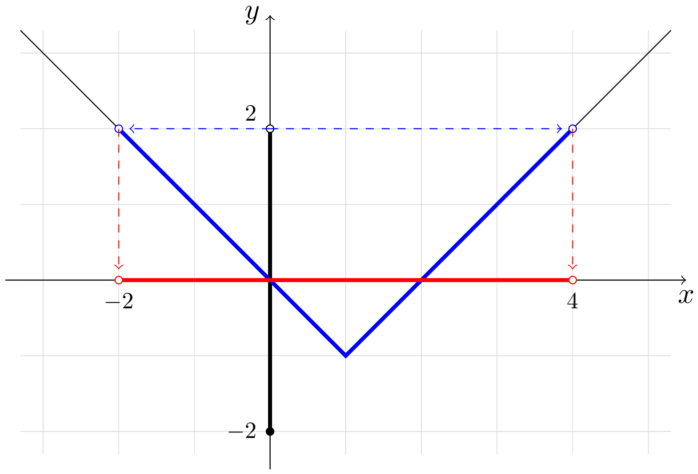
$$f^{-1}(A) = \{-3,\ 1,\ 5\}$$

3) Határozzuk meg a B halmaz függvény szerinti képét, azaz az $\boldsymbol{f(B)}$ halmazt!
A feladatot grafikusan oldjuk meg. A függvény ábrázolása után helyezzük a B halmazt az x számegyenesre és keressük meg azokat a grafikonbeli pontokat, melyek első koordinátájuk B-beli elem. Az így kapott grafikonbeli pontok második koordinátai adják meg a keresett halmazt.



$$f(B) = [-1,\ 2]$$

4) Határozzuk meg a B halmaz függvény szerinti ősképét, azaz az $\boldsymbol{f^{-1}(B)}$ halmazt!
A feladatot grafikusan oldjuk meg. A függvény ábrázolása után helyezzük a B halmazt az y számegyenesre és keressük meg azokat a grafikonbeli pontokat, melyek második koordinátája B-beli elem. Az így kapott grafikonbeli pontok első koordinátai adják meg a keresett halmazt.



$$f^{-1}(B) =]-2, 4[$$

20. Feladat. *Legyen* $A := \{-1, 0, 2\}$, $B :=]-1, 0]$ *és*

$$f(x) := \frac{1}{x-1}, \qquad (x \neq 1).$$

Adjuk meg a halmazok függvény szerinti képét és ősképét!

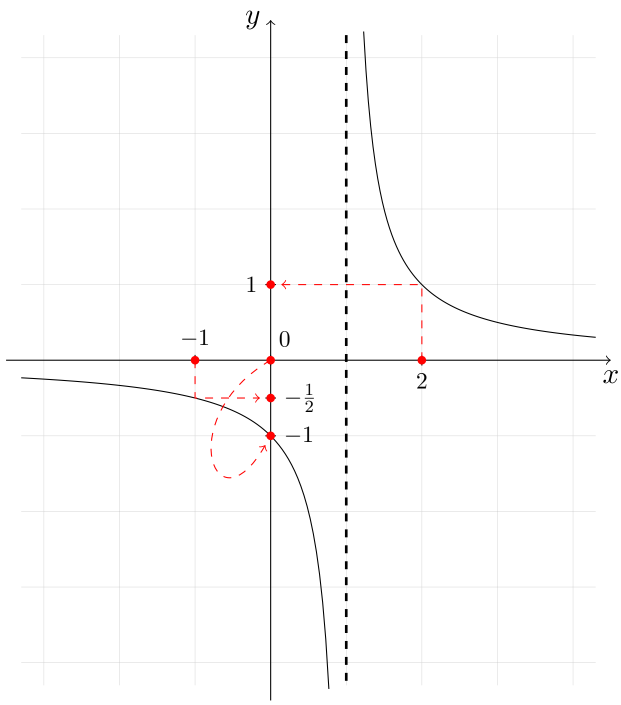
Megoldás: Az előző feladathoz hasonlóan járunk el.

1) Az A halmaz függvény szerinti képe:

$$f(-1) = \frac{1}{-1-1} = -\frac{1}{2},$$
$$f(0) = \frac{1}{0-1} = -1,$$
$$f(2) = \frac{1}{2-1} = 1.$$

Ezért $f(A) = \{-1, -\frac{1}{2}, 1\}$.

Az előző megoldás grafikusan:



$$f(A) = \{-1,\, -\tfrac{1}{2},\, 1\}$$

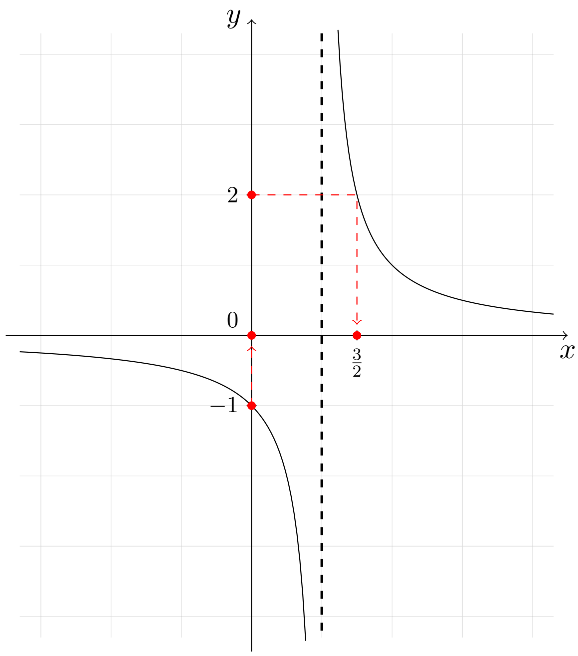
2) Az A halmaz függvény szerinti ősképe:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x-1} &= -1, && x = 0,\\
\frac{1}{x-1} &= 0, && \text{nincs megoldása},\\
\frac{1}{x-1} &= 2, && x = \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Ezért

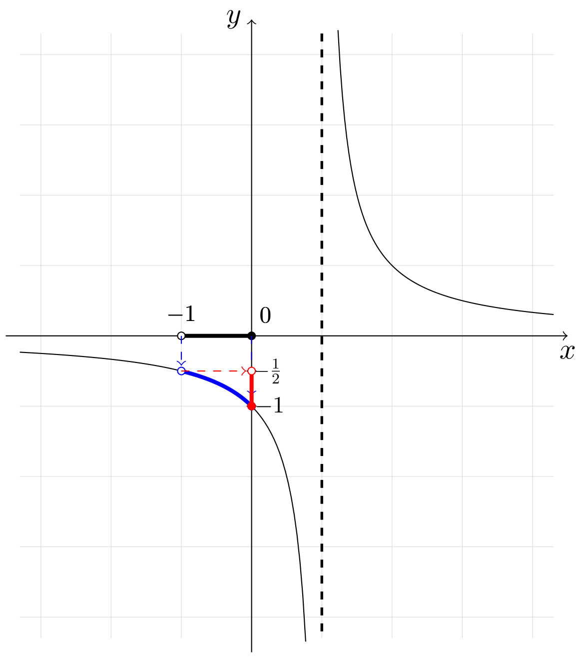
$$f^{-1}(A) = \left\{0,\, \frac{3}{2}\right\}.$$

Az előző megoldás grafikusan:



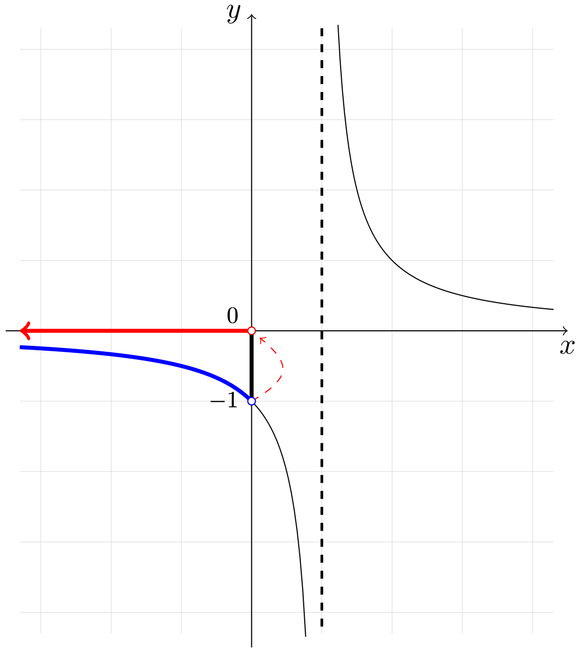
$$f^{-1}(A) = \{0,\ \tfrac{3}{2}\}$$

3) A B halmaz függvény szerinti képét grafikusan oldjuk meg.



$$f(B) = [-1,\ -\tfrac{1}{2}[$$

4) A B halmaz függvény szerinti ősképét grafikusan oldjuk meg.



$$f^{-1}(B) =]-\infty, 0[$$

A következőkben a halmazok függvény szerinti képét és ősképét fogjuk általánosan vizsgálni. Nem nehéz belátni, hogy egyfajta „monotonitás" érvényes a halmazok függvény szerinti képére, nevezetesen, ha $A \subseteq B$, akkor $f(A) \subseteq f(B)$. Valóban

$$\begin{aligned} y \in f(A) &\implies \exists x \in A,\ \text{hogy}\ f(x) = y \\ &\implies \exists x \in B,\ \text{hogy}\ f(x) = y \\ &\implies y \in f(B), \end{aligned}$$

hiszen ha $x \in A$, akkor $x \in B$. Ugyanilyen egyszerűen igazolható a „monotonitás" a halmazok függvény szerinti ősképére is.

5. Tétel. *Legyen $f\colon X \to Y$ adott függvény és $A, B \subseteq X$. Ekkor*

a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$,

b) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.

Továbbá, ha az f függvény invertálható, akkor

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$$

Bizonyítás.

a) Mivel $A \subseteq A \cup B$, ezért $f(A) \subseteq f(A \cup B)$.
Hasonlóan $f(B) \subseteq f(A \cup B)$. Tehát $f(A) \cup f(B) \subseteq f(A \cup B)$. Másrészt

$$\begin{aligned} y \in f(A \cup B) &\implies \exists x \in A \cup B, \text{ hogy } f(x) = y \\ &\implies \exists x \in A, \text{ hogy } f(x) = y, \text{ vagy} \\ & \exists x \in B, \text{ hogy } f(x) = y \\ &\implies y \in f(A) \text{ vagy } y \in f(B) \\ &\implies y \in f(A) \cup f(B), \end{aligned}$$

vagyis $f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B)$, amiből az egyenlőség azonnal következik.

b) Mivel $A \cap B \subseteq A$, ezért $f(A \cap B) \subseteq f(A)$. Hasonlóan $f(A \cap B) \subseteq f(B)$.
Tehát $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.

Másrészt, ha az f függvény invertálható, akkor elegendő igazolni, hogy

$$f(A) \cap f(B) \subseteq f(A \cap B).$$

Ha

$$\begin{aligned} y \in f(A) \cap f(B) &\implies \exists x_1 \in A, \text{ hogy } f(x_1) = y, \text{ és} \\ & \exists x_2 \in B, \text{ hogy } f(x_2) = y. \end{aligned}$$

Mivel az f függvény invertálható, így $x_1 = x_2$. Jelölje x az x_1 és x_2 közös értékét! Ekkor $x \in A$ és $x \in B$, azaz $x \in A \cap B$ és $f(x) = y$. Ebből következik, hogy $y \in f(A \cap B)$. Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

Keressünk olyan példát, amelyre $f(A \cap B)$ valódi részhalmaza $f(A) \cap f(B)$-nek! Legyen

$$f(x) = x^2, \qquad A = \{-1\}, \quad B = \{1\}.$$

Ebből $f(A) \cap f(B) = \{1\}$, de $f(A \cap B) = \emptyset$.

Az előző példa lényege az, hogy az f függvény nem invertálható, hiszen egyrészt az előző tétel azt mondja ki, hogy csak ilyen függvényeknél lehet példát találni arra, hogy

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B),$$

másrészt nem invertálható függvények értelmezési tartományában mindig találunk két különböző a és b elemet, hogy $f(a) = f(b)$. Így ha $A = \{a\}$ és $B = \{b\}$, akkor

$$f(A \cap B) = \emptyset, \quad \text{de} \quad f(A) \cap f(B) \neq \emptyset.$$

A halmazok ősképe esetén a helyzet egyszerűbb.

6. Tétel. *Legyen $f\colon X \to Y$ adott függvény, A és B két tetszőleges halmaz. Ekkor*

a) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$,

b) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

Bizonyítás.

a)
$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(A \cup B) &\iff f(x) \in A \cup B \\ &\iff f(x) \in A \text{ vagy } f(x) \in B \\ &\iff x \in f^{-1}(A) \text{ vagy } x \in f^{-1}(B) \\ &\iff x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B). \end{aligned}$$

b) Az előző ponthoz hasonlóan.

Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

További fontos tulajdonság, hogy minden $A \in D_f$ esetén $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ teljesül, hiszen ha $a \in A$, akkor $f(a) \in f(A)$ és így $a \in f^{-1}(f(A))$. Az egyenlőség nem mindig igaz. Ellenpéldaként szolgál az $f(x) = x^2$, $A = \{1\}$, mivel ekkor

$$f^{-1}(f(A)) = \{-1, 1\} \neq A.$$

Invertálható függvények esetén nem tudunk ellenpéldát találni. Ezt mondják ki a következő állítások.

7. Tétel. *Legyen $f\colon X \to Y$ egy függvény. f invertálható akkor és csak akkor, ha minden $A, B \subseteq X$ halmaz esetén az $f(A) = f(B)$ egyenlőségből következik, hogy $A = B$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy minden $A, B \subseteq X$ esetén az $f(A) = f(B)$ egyenlőségből következik, hogy $A = B$. Legyen $a, b \in X$ két olyan elem, amire $f(a) = f(b)$ teljesül. Ha $A = \{a\}$, $B = \{b\}$, akkor $f(A) = f(B)$, amiből következik, hogy $A = B$ és így $a = b$. Tehát f invertálható.

Másrészt, legyen f invertálható és $A, B \subseteq X$ két halmaz, amire teljesül az $f(A) = f(B)$ egyenlőség. Tegyük fel még, hogy $a \in A$, de $a \notin B$. Mivel ekkor $f(a) \in f(A) = f(B)$, így van olyan $b \in B$, hogy $f(b) = f(a)$, amiből következik, hogy $b = a$ hiszen f invertálható. Tehát $a \in B$, azaz $A \subseteq B$. Hasonlóan az A és B halmaz szerepcserével igazolható, hogy $B \subseteq A$. Tehát $A = B$. Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

8. Tétel. *Legyen $f\colon X \to Y$ egy függvény. f invertálható akkor és csak akkor, ha minden $A \subseteq X$ halmaz esetén $f^{-1}(f(A)) = A$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy minden $A \subseteq X$ halmaz esetén $f^{-1}(f(A)) = A$. Legyen $A, B \subseteq X$ két halmaz, amire teljesül az $f(A) = f(B)$ egyenlőség. Ekkor $f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(f(B))$, így $A = B$. Az előző tételből következik, hogy f invertálható.

Másrészt, legyen f invertálható és $A \subseteq X$ egy halmaz. Tudjuk, hogy minden függvény esetén $A \subseteq f^{-1}(f(A))$. Lássuk be a fordított relációt. Legyen $a \in f^{-1}(f(A))$, ekkor $f(a) \in f(A)$. Jelölje $B := A \cup \{a\}$, amiből

$$f(B) = f(A \cup \{a\}) = f(A) \cup f(\{a\}) = f(A).$$

Így $A = B$, vagyis $a \in A$. Tehát $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$, amiből az egyenlőség rögtön következik. Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

Ha a fenti állításban A egy egyelemű halmaz, akkor kapjuk az

$$f^{-1}(f(a)) = a$$

gyakran alkalmazott összefüggést minden $a \in D_f$ esetén. Fontos még megjegyezni, hogy az f^{-1} függvény mindig invertálható és $(f^{-1})^{-1} = f$. Ezért

$$f(f^{-1}(b)) = b$$

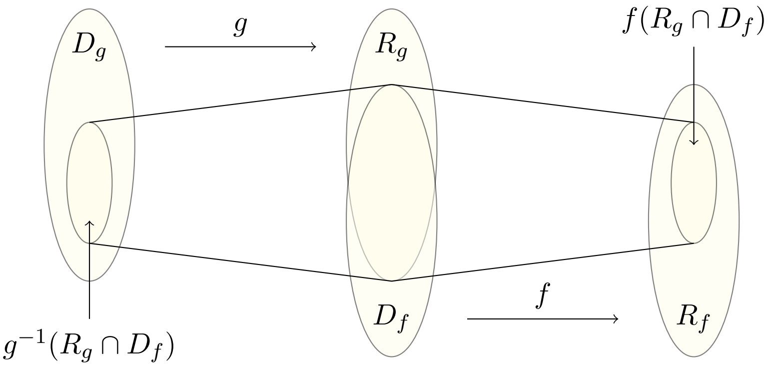
összefüggés igaz minden $b \in R_f$ esetén.

7. Összetett függvények meghatározása

Az 5. részben megismertük az összetett függvény fogálmát. Azt tanultuk, hogy az $f \circ g$ összetett függvény nem más, mint az f és g relációk kompozíciója, amelyről tudjuk, hogy függvény abban az esetben, ha f és g szintén függvények. Továbbá

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \qquad \text{minden } x \in D_{f \circ g} \text{ esetén.}$$

Az összetett reláció fogalmából nem nehéz belátni, hogy értelmezési tartománya a $g^{-1}(R_g \cap D_f)$ halmaz. Ezért az $f \circ g$ összetett függvény meghatározásakor első lépésként az $R_g \cap D_f$ halmazt kell meghatározni, amin keresztül „átmegy" a függvény. Utána megadhatjuk az értelmezési tartományát. Végül az összetett függvény szabályát az $f(g(x))$ összefüggés határozza meg.



21. Feladat. *Határozzuk meg az $f \circ g$ összetett függvényt az alábbi függvények esetében:*

a) $f\colon [0, \infty[\to \mathbf{R},\ f(x) = \sqrt{x}$ *és* $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ g(x) = x - x^2$,

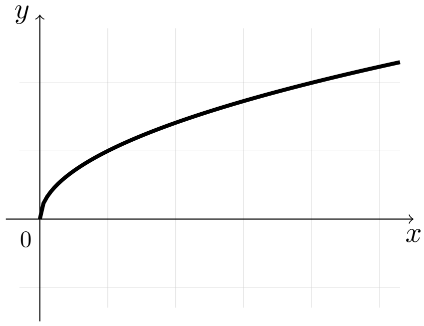
b) $f\colon]-\infty, 0[\to \mathbf{R},\ f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ *és* $g\colon \mathbf{R} \setminus \{-1\} \to \mathbf{R},\ g(x) = -\dfrac{1}{x+1}$,

c) $f\colon [-1, \infty[\to \mathbf{R},\ f(x) = \sqrt{x+1}$ *és* $g\colon \mathbf{R} \setminus \{1\} \to \mathbf{R},\ g(x) = \dfrac{1}{x-1}$,

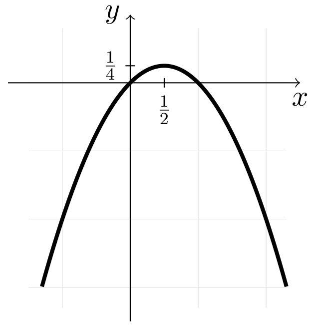
d) $f\colon]-\infty, 0] \to \mathbf{R},\ f(x) = 2^x$ *és* $g\colon [0, \infty[\to \mathbf{R},\ g(x) = -x$.

Megoldás: A megoldáshoz meg kell határoznunk az f külső függvény D_f értelmezési tartományát és a g belső függvény R_g értékkészletét, majd ezekből a $g^{-1}(R_g \cap D_f)$ halmazt, azaz az $R_g \cap D_f$ halmaz g függvény szerinti őseképét, mely a keresett összetett függvény értelmezési tartománya lesz. Ebben a megadott f és g függvények ábrázolása nagy segítséget nyújthat. Végül az $f(g(x))$ összetett függvény képletét úgy kapjuk, hogy az f függvény képletében lévő minden x előfordulási helyébe behelyettesítjük a g függvény képletét.

a)



$f(x) = \sqrt{x}$



$g(x) = x - x^2$

f értelmezési tartománya $D_f = [0, \infty[$,

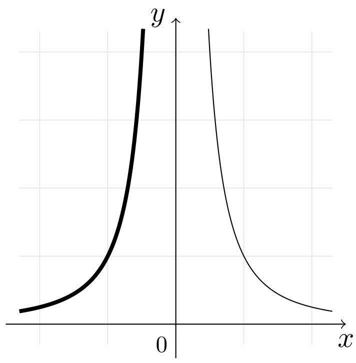
g értékkészlete $R_g = \left]-\infty, \dfrac{1}{4}\right]$,

$R_g \cap D_f = \left[0, \dfrac{1}{4}\right]$, $\qquad g^{-1}(R_g \cap D_f) = [0, 1]$,

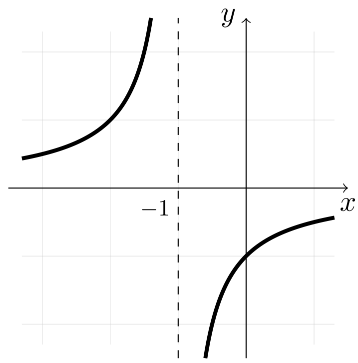
A keresett összetett függvény

$$f(g(x)) = \sqrt{x - x^2}, \qquad (x \in [0, 1]).$$

b)



$f(x) = \frac{1}{x^2}$



$g(x) = -\frac{1}{x+1}$

f értelmezési tartománya $D_f =]-\infty, 0[$,

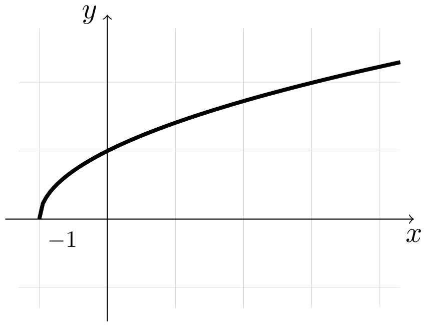
g értékkészlete $R_g = \mathbf{R} \setminus \{0\}$,

$R_g \cap D_f =]-\infty, 0[$, $\qquad g^{-1}(R_g \cap D_f) =]-1, \infty[$,

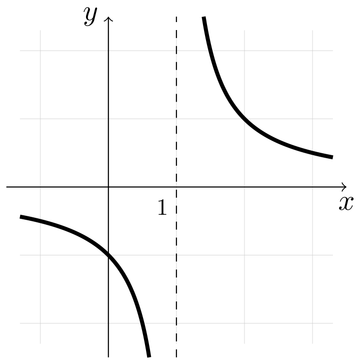
A keresett összetett függvény

$$f(g(x)) = \frac{1}{\left(-\frac{1}{x+1}\right)^2} = (x+1)^2, \qquad (x \in]-1, \infty[).$$

c)



$f(x) = \sqrt{x+1}$

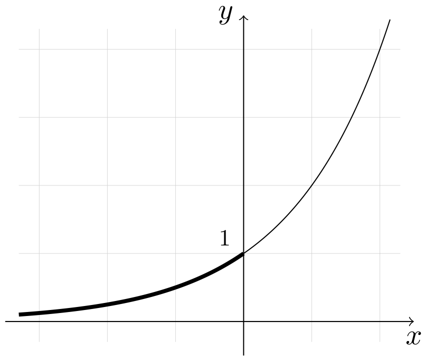


$g(x) = \frac{1}{x-1}$

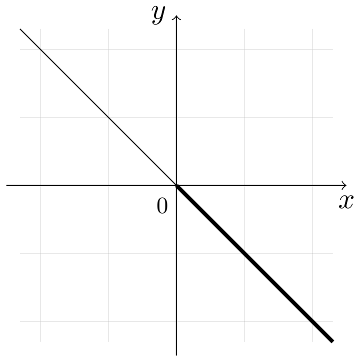
f értelmezési tartománya $D_f = [-1, \infty[$,
g értékkészlete $R_g = \mathbf{R} \setminus \{0\}$,
$R_g \cap D_f = [-1, \infty[\setminus \{0\}$, $\qquad g^{-1}(R_g \cap D_f) =]-\infty, 0] \cup]1, \infty[$,
A keresett összetett függvény

$$f(g(x)) = \sqrt{\frac{1}{x-1} + 1} = \sqrt{\frac{x}{x-1}}, \qquad (x \in \mathbf{R} \setminus]0, 1]).$$

d)



$f(x) = 2^x$



$g(x) = -x$

f értelmezési tartománya $D_f =]-\infty, 0]$,
g értékkészlete $R_g =]-\infty, 0]$,
$R_g \cap D_f =]-\infty, 0]$, $\qquad g^{-1}(R_g \cap D_f) = [0, \infty[$,
A keresett összetett függvény

$$f(g(x)) = 2^{-x} = \frac{1}{2^x}, \qquad (x \in [0, \infty[).$$

9. Tétel. *Legyen adott az f és g két invertálható függvény. Ekkor $f \circ g$ is invertálható és*

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}.$$

Bizonyítás. A 3. Tételből következik, hogy az $f \circ g$ reláció inverze $g^{-1} \circ f^{-1}$. Mivel f és g invertálható függvény, ezért g^{-1} és f^{-1} függvény, és így a 4. Tétel miatt $(f \circ g)^{-1}$ is függvény. Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

Az előző tétel értelmében, ha f és g két invertálható függvény, akkor az $f \circ g$ összetett függvény inverzének képlete

$$(f \circ g)^{-1}(x) = g^{-1}(f^{-1}(x)),$$

és értelmezési tartománya

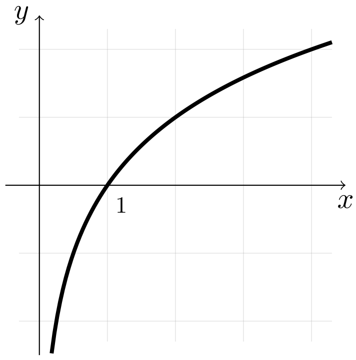
$$(f^{-1})^{-1}(R_{f^{-1}} \cap D_{g^{-1}}) = f(D_f \cap R_g).$$

Ez előbbi értelmezési tartomány a 21. Feladatot megelőző ábrán is látható.

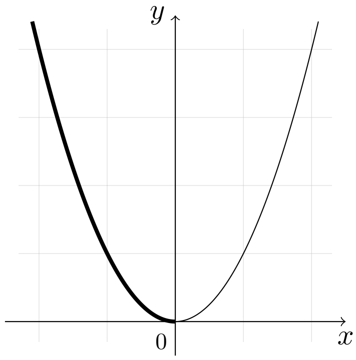
22. Feladat. *Az előző tétel alapján határozzuk meg az $f \circ g$ összetett függvény inverzét az alábbi függvények esetében:*

$$f\colon]0,\infty[\to \mathbf{R},\ \ f(x) = \log_2 x \ \textit{ és } \ g\colon]-\infty, 0[\to \mathbf{R},\ \ g(x) = x^2.$$

Megoldás:



$f(x) = \log_2 x$



$g(x) = x^2$

f értelmezési tartománya $D_f =]0,\infty[$, g értékkészlete $R_g = [0,\infty[$,

$R_g \cap D_f =]0,\infty[$, $f(R_g \cap D_f) = \mathbf{R}$,

Mivel $f^{-1}(x) = 2^x$ és $g^{-1}(x) = -\sqrt{x}$, így a keresett összetett függvény inverze

$$g^{-1}(f^{-1}(x) = -\sqrt{2^x}, \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

8. Halmazrendszerek

A halmazok elemeit semmilyen módon nem korlátozzuk, így azok halmazok is lehetnek. Ilyennel már találkoztunk a rendezett pár fogalmánál. **Halmazrendszernek** nevezzük azokat a halmazokat, amelyeknek elemei is halmazok. Ekkor írott nagybetűkkel szokás őket jelölni, pl. $\mathcal{A}$-val.

Halmazrendszerre az egyik legfontosabb példa egy halmaz összes részhalmazának halmaza, hiszen tetszőleges két elemének uniója, metszete, és tetszőleges elemének az alaphalmazra vonatkozó komplementere is eleme ennek a halmazrendszernek. Az A halmaz összes részhalmazának halmazát az A **hatványhalmazának** nevezzük és 2^A-val vagy $\mathcal{P}(A)$-val jelöljük. Az elnevezés abból adódik, hogy egy n elemű halmaz hatványhalmaza 2^n elemű halmaz.

A halmazrendszerek elemeinek jobb „kezelhetősége” érdekében bevezetjük a következő fogalmat.

20. Definíció. *Legyen $\mathcal{A}$ egy halmazrendszer és Γ egy halmaz. Ha találunk egy $f\colon \Gamma \to \mathcal{A}$ függvényt, akkor azt mondjuk, hogy Γ* ***indexhalmaza*** *az $\mathcal{A}$ halmazrendszernek és $\mathcal{A}$ egy Γ-val* ***indexelt halmazrendszer****. Ekkor $\mathcal{A}$-t $\{A_\gamma\colon \gamma \in \Gamma\}$ módon is jelöljük.*

Például ha szeretnénk indexelni az összes szimmetrikus zárt intervallumokból álló halmazrendszert, a következőképpen tehetjük meg: $\{[-x, x]\colon x \in]0, \infty[\}$. Az $\{\{x\}\colon x \in \mathbf{R}\}$ módon lehet indexelni az összes valós számokból álló egyelemű halmazok halmazrendszerét.

Fontos megjegyezni, hogy a halmazrendszerek halmazok, így ha előfordul, hogy két különböző $\gamma, \delta \in \Gamma$ index esetén $A_\gamma = A_\delta$, akkor ezt a halmazt csak egyszer soroljuk fel a halmazrendszerben. Másrészt minden halmazrendszer indexelhető, hiszen $\mathcal{A} = \{\gamma\colon \gamma \in \mathcal{A}\}$.

Halmazrendszer esetén a következő módon értelmezhető az unió és a metszet.

21. Definíció. *Az indexelt $\mathcal{A} := \{A_\gamma\colon \gamma \in \Gamma\}$* ***halmazrendszer uniója:***

$$\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma := \{a\colon \textit{van olyan } \gamma \in \Gamma,\ \textit{hogy } a \in A_\gamma\},$$

és ***metszete:***

$$\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma := \{a\colon \textit{minden } \gamma \in \Gamma \textit{ esetén } a \in A_\gamma\}.$$

Egyszerűen bebizonyítható, hogy az unió és a metszet nem függ az indexhalmaz megválasztásától. Ezért gyakran a $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ halmazt $\bigcup \mathcal{A}$, míg a $\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ halmazt $\bigcap \mathcal{A}$ módon is jelöljük.

23. Feladat. *Adjuk meg a következő halmazrendszerek unióját és metszetét!*

a) $\mathcal{A} = \{[0, x] \colon x \in]0, \infty[\}$,

b) $\mathcal{A} = \left\{ \left[-x, \frac{1}{x} \right] \colon x \in]1, \infty[\right\}$,

c) $\mathcal{A} = \{\{x\} \colon x \in A\}$,

Megoldás:

a) $\bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma = [0, \infty[;\quad \bigcap\limits_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma = \{0\}.$

b) $\bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma =] - \infty, 1[;\quad \bigcap\limits_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma = [-1, 0].$

c) $\bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma = A;\quad \bigcap\limits_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma = \emptyset.$

Sok olyan tulajdonság, amely két halmaz uniójára és metszetére teljesül, megmarad halmazrendszerekre is, sőt, általában hasonló módon lehet őket bebizonyítani. Példaképpen bizonyítsuk be a De Morgan azonosságokat!

24. Feladat. *Legyen* $\{A_\gamma \colon \gamma \in \Gamma\}$ *egy halmazrendszer. Bizonyítsuk be, hogy*

a) $\overline{\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma} = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} \overline{A_\gamma}$,

b) $\overline{\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma} = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \overline{A_\gamma}$ *!*

Megoldás:

a)
$$\begin{aligned} a \in \overline{\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma} &\iff a \notin \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \\ &\iff \text{ nincs olyan } \gamma \in \Gamma, \text{ hogy } a \in A_\gamma \\ &\iff \forall \gamma \in \Gamma \text{ esetén } a \in \overline{A_\gamma} \\ &\iff a \in \bigcap_{\gamma \in \Gamma} \overline{A_\gamma} \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} a \in \overline{\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma} &\iff a \notin \bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \\ &\iff \text{nem minden } \gamma \in \Gamma \text{ esetén } a \in A_\gamma \\ &\iff \exists \gamma \in \Gamma, \text{ hogy } a \in \overline{A_\gamma} \\ &\iff a \in \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \overline{A_\gamma} \end{aligned}$$

22. Definíció. *Az $\mathcal{A}$ egy **páronként diszjunkt halmazrendszer**, ha bármely két különböző eleme diszjunkt.*

A következő részben az osztályozás fogalmát fogjuk alkalmazni.

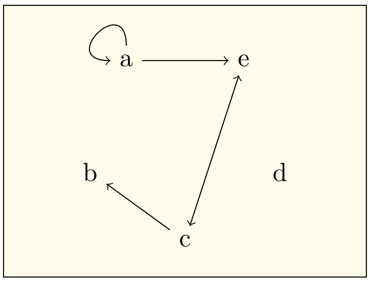
23. Definíció. *Legyen A egy nem üres halmaz és $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(A)$ egy halmazrendszer, amely nem tartalmazza az üres halmazt. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{A}$ egy **osztályozása** az A halmaznak, ha páronként diszjunkt és $\bigcup \mathcal{A} = A$. Az $\mathcal{A}$ halmazrendszer elemeit **osztályoknak** nevezzük.*

9. Ekvivalencia- és rendezési relációk

A következőkben olyan relációkkal foglalkozunk, amelyek egy adott halmazon értelmezettek ($A = B$). Az ilyen relációkat oly módon szemléltethetjük egy diagramon, hogy a halmaz elemei helyett egy-egy „pontot”, a reláció elemei helyett „nyilakat” rajzolunk. Például az $A = \{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$ halmazon értelmezett

$$\varrho = \{(a, a),\ (a, e),\ (c, b),\ (c, e),\ (e, c)\}$$

reláció a következőképpen ábrázolható:



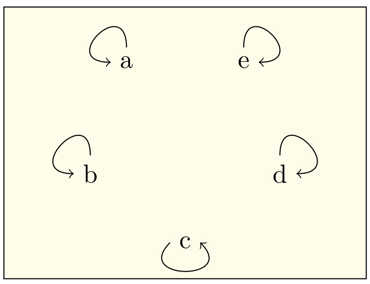
Az egy adott halmazon értelmezett relációknál a következő tulajdonságokat vizsgáljuk.

24. Definíció. *Legyen ϱ az A halmazon értelmezett reláció.*

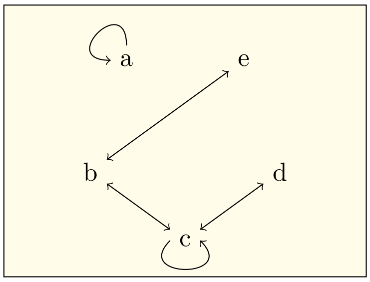
- *Azt mondjuk, hogy ϱ **reflexív**, ha $a\varrho a$ minden $a \in A$ esetén.*
- *Azt mondjuk, hogy ϱ **szimmetrikus**, ha $a\varrho b \implies b\varrho a$ minden $a, b \in A$ esetén.*
- *Azt mondjuk, hogy ϱ **antiszimmetrikus**, ha $a\varrho b$ és $b\varrho a \implies a = b$ minden $a, b \in A$ esetén.*
- *Azt mondjuk, hogy ϱ **tranzitív**, ha $a\varrho b$ és $b\varrho c \implies a\varrho c$ minden $a, b, c \in A$ esetén.*

A diagramon az előző definíciók a következőképpen ellenőrizhetők:

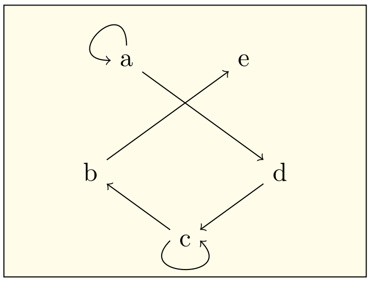
- A reláció reflexív akkor és csak akkor, ha tartalmaz minden hurkot.



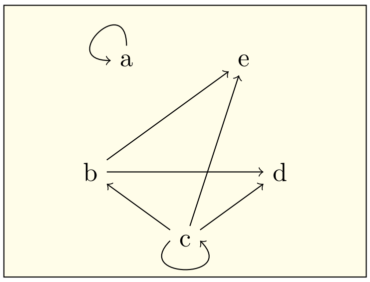
- A reláció szimmetrikus akkor és csak akkor, ha minden nyíl oda-vissza megy (a hurkok kivételével).



- A reláció antiszimmetrikus akkor és csak akkor, ha nem tartalmaz oda-vissza nyilakat.



- A reláció tranzitív akkor és csak akkor, hogy ha nyilak mentén eljuthatunk egy pontból a másikba, akkor van olyan nyíl, amely egyenesen oda visz.

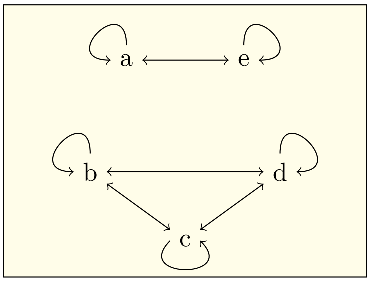


25. Definíció. *Azt mondjuk, hogy egy adott halmazon értelmezett reláció* ***ekvivalenciareláció*** *ha reflexív, szimmetrikus és tranzitív. Általában az ekvivalenciarelációk esetén a $\sim$ jelet használjuk.*

Néhány példa ekvivalenciarelációra a következő:

- $A :=$ {egy sík egyeneseinek halmaza} és $f \varrho g \iff f$ és g párhuzamos egyenes.
- $A :=$ {egy sík háromszögeinek halmaza} és $x \varrho y \iff x$ és y hasonló háromszög.

- $A := \mathbf{Z}$ és $n \varrho k \iff n - k$ osztható 10-zel.
- A következő diagrammal megadott reláció:



Az ekvivalenciarelációk osztályozásokkal jellemezhetők.

10. Tétel. *Legyen $\mathcal{A}$ egy osztályozása az A halmaznak. Az A halmazon értelmezett ϱ reláció, amire $x \varrho y$ akkor és csak akkor, ha x és y ugyanannak az osztálynak eleme, ekvivalenciareláció. Fordítva, ha ϱ az A halmazon értelmezett ekvivalenciareláció és*

$$A_x := \{y \in A \colon y \varrho x\},$$

akkor az $\mathcal{A} := \{A_x \colon x \in A\}$ halmazrendszer egy osztályozása az A halmaznak.

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{A}$ egy osztályozása A-nak és ϱ az az A halmazon értelmezett reláció, amire

$$x \varrho y \qquad \iff \qquad x \text{ és } y \text{ ugyanannak az osztálynak eleme.}$$

Jelölje A_x azt az osztályt, amely az x elemet tartalmazza. Mivel $\bigcup \mathcal{A} = A$, mindig van ilyen osztály és mivel $\mathcal{A}$ páronként diszjunkt, így csak egy ilyen osztály van. A ϱ értelmezése azt jelenti, hogy $x \varrho y$ akkor és csak akkor, ha $A_x = A_y$. Valóban $x \varrho y \iff x, y \in A_x$ és $x, y \in A_y$, de mivel a halmazrendszer páronként diszjunkt és $A_x \cap A_y \neq \emptyset$, ezért $A_x = A_y$. Ekkor

- minden $x \in A$ esetén, $A_x = A_x$, vagyis ϱ reflexív,
- minden $x, y \in A$ esetén, ha $A_x = A_y$, akkor $A_y = A_x$, vagyis ϱ szimmetrikus,
- minden $x, y, z \in A$ esetén, ha $A_x = A_y$ és $A_y = A_z$, akkor

  $$A_x = A_y = A_z,$$

  tehát $A_x = A_z$, vagyis ϱ tranzitív.

Ezért ϱ ekvivalenciareláció.

Fordítva, legyen ϱ az A halmazon értelmezett ekvivalenciareláció és

$$A_x := \{y \in A\colon y\varrho x\}.$$

Legyen $x, y \in A$.
Ha $x\varrho y$, akkor $A_x = A_y$. Tudniillik, $z \in A_x \implies z\varrho x$, de $x\varrho y$, így a tranzitivitás miatt $z\varrho y \implies z \in A_y$. Ezért $A_x \subseteq A_y$. A fordított reláció a szimmetria miatt hasonló módon igazolható, amiből az egyenlőség azonnal következik.
Másrészt, ha $x\not\varrho y$, akkor $A_x \cap A_y = \emptyset$. Tudniillik, $z \in A_x \cap A_y \implies z \in A_x$ és $z \in A_y \implies z\varrho x$ és $z\varrho y$, így a szimmetria és tranzitivitás miatt $x\varrho y$, ami ellentmondás.
Ezért az $\mathcal{A} := \{A_x\colon x \in A\}$ halmazrendszer páronként diszjunkt. Továbbá

$$\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{x\in A} A_x = A,$$

hiszen $x \in A_x \subseteq A$ minden $x \in A$ esetén. Így $\mathcal{A}$ egy osztályozása A-nak.

Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

Az ekvivalenciarelációra megadott példákban a következő osztályokat kapjuk:

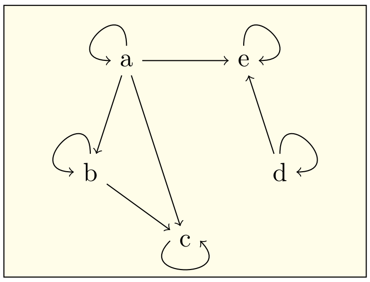
- $A :=$ {egy sík egyeneseinek halmaza} és $f\varrho g \iff f$ és g párhuzamos egyenes. Végtelen sok osztály van. Adott egyenessel párhuzamos egyenesek halmaza osztályt alkot. Ha egy egyenes nem eleme ennek az osztálynak, akkor a vele párhuzamos egyenesek halmaza egy másik osztályt alkot, és így tovább.
- $A :=$ {egy sík háromszögeinek halmaza} és $x\varrho y \iff x$ és y hasonló háromszög. Végtelen sok osztály van. Adott háromszöghöz hasonló háromszögek halmaza osztályt alkot. Ha egy háromszög nem eleme ennek az osztálynak, akkor a hozzá hasonló háromszögek halmaza egy másik osztályt alkot, és így tovább.
- $A := \mathbf{Z}$ és $n\varrho k \iff n - k$ osztható 10-zel. Összesen 10 osztály van. Az osztályozás a számok utolsó számjegye alapján történik. Így kapjuk a 0-val végződő számok osztályát, az 1-gyel végződő számok osztályát, és így tovább.
- A diagrammal megadott reláció esetén 2 osztály van: $\mathcal{A} = \{\{a, e\}, \{b, c, d\}\}$.

26. Definíció. *Azt mondjuk, hogy egy adott halmazon értelmezett reláció **rendezési reláció**, ha reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív. Általában a rendezési relációk esetén a $\leq$ jelet használjuk.*

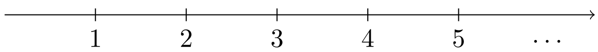
Néhány példa rendezési relációra a következő:

- $A := \mathbf{R}$ és $x\varrho y \iff x \leq y$.
- $A := \mathbf{N}^+$ és $n\varrho k \iff n$ osztható k-val.

- A következő diagrammal megadott reláció:



A pozitív természetes számok körében az oszthatóság és a kisebb egyenlőség két lényegesen különböző rendezési reláció. A kisebb egyenlőség esetén tetszőleges két elemről tudjuk, hogy az egyik kisebb vagy egyenlő a másiknál. Olyan, mintha lenne egy vonal vagy lánc, ahol az elemek elhelyezkednek.



Az oszthatóság esetében nem ez a helyzet, például 2 és 3 között az oszthatóság semmilyen irányban nem áll fenn. Így érthető a következő fogalom.

27. Definíció. *Ha egy az A halmazon értelmezett ϱ rendezési reláció esetén minden $a, b \in A$ elemre igaz, hogy $a\varrho b$ vagy $b\varrho a$, akkor azt mondjuk, hogy a reláció egy* ***teljes rendezés****. Ellenkező esetben* ***parciális rendezésről*** *beszélünk.*

A fenti diagrammal megadott rendezési relációkra vonatkozó példa egy parciális rendezést mutat.

28. Definíció. *Legyen ϱ az A halmazon értelmezett reláció és $B \subseteq A$. A $\varrho|_B := \varrho \cap (B \times B)$ relációt a* ***ϱ B halmazra való leszűkítésének*** *nevezzük.*

Nem nehéz bebizonyítani, hogy egy ekvivalencia-, vagy rendezési reláció egy halmazra való leszűkítése is egy ekvivalencia-, vagy rendezési reláció marad. Egy parciális rendezés leszűkítése már teljes rendezés lehet.

29. Definíció. *Legyen ϱ az A halmazon értelmezett rendezési reláció és $B \subseteq A$. Ha a $\varrho|_B$ reláció teljes rendezés, $\varrho|_B$-t* ***láncnak*** *nevezzük.*

Láncot alkot a pozitív számokon értelmezett oszthatósági relációra nézve a 2 hatványaiból álló halmaz, hiszen ha két szám 2 hatványa, akkor a kisebb kitevőjű szám osztja a másik számot.

25. Feladat. *Döntsük el, hogy az alábbi relációk közül melyek ekvivalenciarelációk és melyek rendezési relációk. Ekvivalenciareláció esetén adjuk meg a reláció által indukált osztályozást. Rendezési reláció esetén adjunk meg legalább egy láncot.*

a) ϱ *az egész számokon értelmezett és* $x\varrho y \iff y - x$ *osztható 2-vel,*

b) ϱ *az egész számokon értelmezett és* $x\varrho y \iff x$ *osztja* y*-t,*

c) ϱ *egy sík köreinek halmazán értelmezett és* $x\varrho y \iff x$ *és* y *koncentrikus körök,*

d) ϱ *egy sík pontjainak halmazán értelmezett,* O *a síknak egy rögzített pontja, és* $P\varrho Q \iff P$ *és* Q *ugyanazon az* O *kezdőpontú félegyenesen van, továbbá* $\overline{OP} \leq \overline{OQ}$.

Megoldás:

a) Ekvivalenciareláció, mert
   - minden x, y, z egész szám esetén $x - x = 0$ osztható 2-vel (reflexív),
   - ha $y - x$ osztható 2-vel, akkor $x - y = -(y - x)$ is (szimmetrikus),
   - ha $y - x$ és $z - y$ osztható 2-vel, akkor $z - x = (z - y) + (y - x)$ is osztható 2-vel (tranzitív).

   Az osztályozásnak két osztálya van: a páros és a páratlan egész számokból álló halmazok.

b) Nem szimmetrikus (2 osztja 4-t, de 4 nem osztja 2-t), sem antiszimmetrikus (1 osztja -1-t, és -1 osztja 1-t), ezért nem ekvivalenciareláció és nem rendezési reláció.

c) Ekvivalenciareláció, mert
   - minden x, y, z kör esetén x önmagával koncentrikus (reflexív),
   - ha x és y koncentrikus, akkor fordítva is (szimmetrikus),
   - ha x és y koncentrikus és y és z koncentrikus, akkor nyilván x és z is az (tranzitív).

   Egy osztályt azok a körök alkotnak, amelyek koncentrikusak egymással.

d) Rendezési reláció, mert
   - minden P, Q, R pont esetén P önmagával ugyanarra a félegyenesre esik és $\overline{OP} \leq \overline{OP}$ (reflexív),
   - ha $P\varrho Q$ és $Q\varrho P$, akkor P és Q ugyanazon az O kezdőpontú félegyenesen van és $\overline{OP} = \overline{OQ}$, ezért $P = Q$ (antiszimmetrikus),
   - $P\varrho Q$ és $Q\varrho R$, akkor P, Q és R ugyanazon az O kezdőpontú félegyenesen van és $\overline{OP} \leq \overline{OQ} \leq \overline{OR}$, így $P\varrho R$ (tranzitív).

   Lánc minden O kezdőpontú félegyenes.

10. Feladatok

26. Feladat. Határozzuk meg az A, B, C halmazok elemeit, ha eleget tesznek a következő feltételeknek!

$$\begin{aligned} A \cup B \cup C &= \{a, b, c, d, e\}, \\ A \cap B \cap C &= \{d\}, \\ A \setminus C &= \{a, b\}, \\ B \setminus C &= \{b, c, e\}. \end{aligned}$$

27. Feladat. Venn-diagrammal ábrázoljuk a középiskolában tanult síknégyszögek különböző fajtáit!

28. Feladat. Adjuk meg az $(A \setminus (B \cup C)) \cup ((B \setminus C) \cap A)$ halmazt ha

$$\begin{aligned} A &:= \{n \in \mathbf{N} \colon n < 7\}, \\ B &:= \{n \in \mathbf{N} \colon n > 20\}, \\ C &:= \{n \in \mathbf{N} \colon n \text{ páros}\}. \end{aligned}$$

29. Feladat. Adjuk meg az $(B \setminus A) \cup (\overline{C} \cap B)$ halmazt ha

$$\begin{aligned} A &:= \{n \in \mathbf{N} \colon n \text{ páratlan}\}, \\ B &:= \{n \in \mathbf{N} \colon n \text{ osztója 24-nek}\}, \\ C &:= \{n \in \mathbf{N} \colon n \text{ osztható 6-tal}\}, \\ H &:= \{n \in \mathbf{N} \colon 0 < n < 25\}, \text{ ami az alaphalmaz.} \end{aligned}$$

30. Feladat. Egy cég eladója, aki háromfajta cikk eladásával foglalkozik, így számol be napi munkájáról: 40 lehetséges vevővel tárgyaltam, közülük 15 nem vásárolt semmit, 15 vásárolt az A árucikkből, 12 a B árucikkből és 10 a C árucikkből. Hatan vásároltak az A-ból és B-ből, egy vevő a B-ből és a C-ből, és hárman az A-ból és a C-ből. Igazat mondott az eladó?

31. Feladat. Egy vállalat 100 dolgozója közül angol nyelvvizsgája van 28 főnek, német nyelvvizsgája 30 főnek, orosz nyelvvizsgája 42 főnek. Angol és német nyelvvizsgája van 8, angol és orosz nyelvvizsgája 10, német és orosz nyelvvizsgája 5 főnek. Három dolgozónak mind a három nyelvből van nyelvvizsgája.

a) Hány dolgozónak nincs egy nyelvvizsgája sem?

b) Hány dolgozónak van csak orosz nyelvvizsgája?

c) Hány dolgozónak van csak német és orosz nyelvvizsgája?

32. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy egyetlen üres halmaz létezik!

33. Feladat. Legyen $A = \{\{\emptyset, 1\}, \{1\}\}$. Az alábbi állítások közül melyik igaz és melyik hamis?

a) $1 \in A$	*b)* $\{1\} \subseteq A$	*c)* $\{\emptyset, 1\} \in A$
d) $\emptyset \in A$	*e)* $\emptyset \subseteq A$	*f)* $\{\emptyset, 1\} \subseteq A$

Hány eleme van az A halmaznak?

34. Feladat. Legyen $B = \{1, 2\}$ és $A = \{B\}$. Az alábbi állítások közül melyik igaz és melyik hamis?

a) $1 \in A$	*b)* $\{1\} \subseteq A$	*c)* $1 \in B$
d) $B \in A$	*e)* $B \subseteq A$	*f)* $\{1, 2\} \in A$

Hány eleme van az A és a B halmaznak?

35. Feladat. Legyen $A :=] - \infty, 1]$, $B :=] - 2, \infty[$ és $C := [-1, 5]$. Adjuk meg a következő halmazokat!

a) $A \cup B$	*b)* $A \cap B$	*c)* $\overline{A} \cap B$	*d)* $A \setminus B$
e) $A \cup C$	*f)* $A \cup \overline{C}$	*g)* $A \setminus C$	*h)* $B \setminus C$

36. Feladat. Döntsük el és igazoljuk, hogy az alábbi állítások közül melyik igaz és melyik nem tetszőleges A és B halmaz esetén!

a) $A \cap B \subseteq \overline{A}$,

b) $A \cap B \subseteq A \cup B$,

c) $A \cap B \subseteq A \setminus B$,

d) $A \cap B \subseteq A \setminus (A \setminus B)$.

37. Feladat. Döntsük el és igazoljuk, hogy az alábbi állítások közül melyik igaz és melyik nem tetszőleges A, B és C halmaz esetén!

a) $A \cap B \cap C \subseteq A \setminus (B \setminus C)$,

b) $A \setminus (B \cup C) \subseteq C$,

c) $(A \cup B) \setminus C \subseteq A \cap B$,

d) $A \cap B \cap C \subseteq \overline{A \cup B} \cap C$.

38. Feladat. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket!

a) $(A \setminus B) \cup B$,

b) $(A \cup B) \setminus B$,

c) $(A \cup B) \cap (A \cup C) \cap A$,

d) $\overline{\overline{A \cap B} \cup C} \cup B$,

e) $(\overline{A \setminus B} \cup \overline{A \setminus C}) \setminus A$,

f) $(A \cup \overline{B}) \cap (A \cup \overline{C}) \cap \overline{B \cup C}$,

g) $A \cup \overline{\overline{A} \cup C} \cup (A \setminus B)$,

h) $\overline{B} \cup \overline{B \cup C} \cup (A \setminus B)$.

39. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy

a) $C \setminus (A \cup B) = \overline{A} \cap \overline{B} \cap C$,

b) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$,

c) $A \cap (B \setminus C) = B \cap (A \setminus C)$,

d) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$,

e) $(A \setminus B) \cup C = ((A \cup C) \setminus B) \cup (B \cap C)$,

f) $(A \setminus B) \cup (C \setminus D) = (((A \cup C) \setminus (D \setminus A)) \setminus (B \setminus C)) \setminus (B \cap D)$,

g) $A \setminus (A \setminus (B \setminus (B \setminus C))) = A \cap B \cap C$,

h) $(A \setminus C) \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$,

i) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$,

j) $(A \cup (B \cap C)) \setminus A = ((A \cup B) \cap C) \setminus A$.

40. Feladat. Definiáljuk az A és B halmaz $A \triangle B$ **szimmetrikus különbségét** a következőképpen:

$$A \triangle B := (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Igazoljuk, hogy

a) $A \triangle B = B \triangle A$,

b) $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$,

c) $A \triangle A = \emptyset$ és $A \triangle \emptyset = A$,

d) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$,

e) $A = B \iff A \triangle B = \emptyset$.

41. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy

a) $(A \cap C) \cup (B \cap D) \subseteq (A \cup B) \cap (C \cap D)$,

b) $(B \setminus C) \setminus (B \setminus A) \subseteq (A \setminus C)$,

c) $A \setminus C \subseteq (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$,

d) $(A \cup B) \setminus (C \cup D) \subseteq (A \setminus C) \cup (B \setminus D)$.

Adjon példákat olyan halmazokra, amikor a fenti egyenlőségek nem állnak fenn!

42. Feladat. Következik-e az $A \setminus B = C$ egyenlőségből, hogy $A = B \cup C$? Válaszát indokolja!

43. Feladat. Legyen $A := [1, 4]$ és $B := [-1, 5]$. Adja meg az $(A \times \mathbf{R}) \cap (\mathbf{R} \times B)$ halmazt!

44. Feladat. Legyen $A := \{0, 1, 2\}$, $B := \{-1, 0, 1, 3\}$ és $C := \{1, 2, 3\}$. Határozzuk meg a következő halmazokat!

a) $(A \times B) \cap (C \times B)$,

b) $(A \cap B) \times (A \cap C)$,

c) $(A \setminus B) \times (C \setminus B)$.

45. Feladat. Határozzuk meg az előző feladatban keresett halmazokat, ha $A :=]-1, 4]$, $B := [1, 5[$ és $C := [0, \infty[$.

46. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy

a) $A \times B \subseteq C \times D \iff A \subseteq C$ és $B \subseteq D$,

b) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$,

c) $(A \cap B) \setminus C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.

47. Feladat. Legyen $A = \{-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 5\}$ és $B = \{-2,\ -1,\ 1,\ 2,\ 3\}$. Határozzuk meg az alábbi A, B halmazpáron értelmezett relációk értelmezési tartományát, értékkészletét és inverzét! Döntsük el, melyek függvények és melyek invertálható függvények!

a) $a\varrho b$ akkor és csak akkor, ha $a + b$ páros szám,

b) $a\varrho b$ akkor és csak akkor, ha $a^2 + b^2$ prímszám,

c) $a\varrho b$ akkor és csak akkor, ha $a^2 - b = 2$,

d) $a\varrho b$ akkor és csak akkor, ha $2a > b$.

48. Feladat. Határozzuk meg az alábbi A, B halmazpáron értelmezett relációk értelmezési tartományát, értékkészletét és inverzét! Döntsük el, melyek függvények és melyek invertálható függvények!

a) $A = \mathbf{N}$, $B = \mathbf{N}$ és $a\varrho b \iff a$ osztja b-t,

b) $A = \mathbf{R}$, $B = \mathbf{R}$ és $a\varrho b \iff a^3 + b^3 = 1$,

c) $A = [0, 9[$, $B = \mathbf{R}$ és $a\varrho b \iff b^2 = a$,

d) $A = \mathbf{Z}$, $B = \mathbf{Z}$ és $a\varrho b \iff a \leq b$.

49. Feladat. Legyen $A := \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, valamint ϱ és σ az A halmazon értelmezett reláció úgy, hogy

$$\varrho := \{(1, 2),\ (1, 3),\ (2, 4),\ (3, 5),\ (4, 3)\}$$
$$\sigma := \{(1, 4),\ (1, 5),\ (2, 4),\ (3, 3),\ (3, 5)\}.$$

Adjuk meg a $\sigma^{-1} \circ \varrho^2$, $\varrho^3 \circ \sigma$ és $\varrho^2 \cap \varrho$ reláció elemeit!

50. Feladat. Legyen $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, valamint ϱ és σ az A halmazon értelmezett reláció úgy, hogy

$$\varrho = \{(1,1), (2,1), (2,5), (4,3), (4,5)\}$$
$$\sigma = \{(1,3), (2,2), (3,5), (4,3), (5,4)\}.$$

Adjuk meg a ϱ^2, $\varrho \circ \sigma$ és $\varrho^{-1} \circ \sigma$ reláció elemeit!

51. Feladat. Adja meg a legbővebb halmazt, ahol a következő függvények értelmezhetők!

a) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}$,

b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{x}}$,

c) $f(x) = \dfrac{\dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{1+x}}{\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{1}{1+x}}$.

52. Feladat. Adjuk meg az alábbi függvények egy olyan leszűkítését, hogy már invertálhatók legyenek!

a) $f\colon \{-6, -3, -1, 2, 4\} \to \{-2, -1, 0, 3\}$, $f(x) = 3$,

b) $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sin x$,

c) $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

53. Feladat. Döntsük el, hogy az alábbi függvények közül melyek invertálhatók és adjuk meg az inverzeket!

a) $f\colon \mathbf{R} \setminus \{-2\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+2}$,

b) $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2+1}$,

c) $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 + 1$,

d) $f\colon]-\infty, 5] \to \mathbf{R}$, $f(x) = (x-5)^2 + 3$.

54. Feladat. Legyen $A = \{-2, 0, 3\}$, $B =]-1, 1]$ és $C = [3, \infty[$, továbbá

$$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \qquad f(x) = x^2 - 1.$$

Határozzuk meg a halmazok függvény szerinti képét és ősképét!

55. Feladat. Legyen $A = \{-3, 1, 2\}$, $B =]-2, 1]$ és $C =]-\infty, 2[$, továbbá

$$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \qquad f(x) = |x+1| + 1.$$

Határozzuk meg a halmazok függvény szerinti képét és ősképét!

56. Feladat. Legyen $A = \{-1,\ 1,\ 2\}$, $B =]-1, 1[$ és $C =]1, \infty[$, továbbá

$$f\colon \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}, \qquad f(x) = \frac{2}{x}.$$

Határozzuk meg a halmazok függvény szerinti képét és ősképét!

57. Feladat. Legyen $A = \{-1,\ 0,\ 4\}$, $B = [2, 1]$ és $C =]-\infty, 1]$, továbbá

$$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \qquad f(x) = 2^x.$$

Határozzuk meg a halmazok függvény szerinti képét és ősképét!

58. Feladat. Legyen $A = \{1,\ 3,\ 9\}$, $B =]0, 1[$ és $C =]0, \infty]$, továbbá

$$f\colon]0, \infty[\to \mathbf{R}, \qquad f(x) = \log_3 x + 1.$$

Határozzuk meg a halmazok függvény szerinti képét és ősképét!

59. Feladat. Legyen $A = \{-1,\ 1,\ 8\}$, $B =]-1, 1[$ és $C =]-1, \infty[$, továbbá

$$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \qquad f(x) = x^3.$$

Határozzuk meg a halmazok függvény szerinti képét és ősképét!

60. Feladat. Legyen $A = \{0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi\}$, $B =]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ és $C =]\pi, \infty[$, továbbá

$$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \qquad f(x) = \sin x.$$

Határozzuk meg a halmazok függvény szerinti képét és ősképét!

61. Feladat. Legyen $f\colon X \to Y$ adott függvény, $A, B \subseteq Y$. Bizonyítsuk be, hogy

a) $f(A \setminus B) \supseteq f(A) \setminus f(B)$,

b) $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$.

62. Feladat. Legyen $f\colon X \to Y$ egy függvény. Igazoljuk, hogy f invertálható akkor és csak akkor, ha minden $A, B \subseteq X$ halmaz esetén

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$$

63. Feladat. Legyen $f\colon X \to Y$ egy függvény. Igazoljuk, hogy f invertálható akkor és csak akkor, ha minden $A, B \subseteq X$ halmaz esetén

$$f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B).$$

64. Feladat. Legyen $f\colon X \to Y$ adott függvény. Bizonyítsuk be, hogy

a) $f \circ I_X = f$ és $I_Y \circ f = f$,

b) ha f invertálható, akkor $f^{-1} \circ f = I_X$,

c) ha f invertálható, akkor $f \circ f^{-1} = I_{R_f}$.

65. Feladat. Határozzuk meg az $f \circ g$ összetett függvényt az alábbi függvények esetében:

a) $f\colon]-\infty, 1] \to \mathbf{R},\ f(x) = \sqrt{1-x}$ és $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ g(x) = -x^2$,

b) $f\colon [0, \infty] \to \mathbf{R},\ f(x) = \sqrt{x}$ és $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ g(x) = x^2$,

c) $f\colon]-\infty, \frac{1}{2}] \to \mathbf{R},\ f(x) = \sqrt{1-2x}$ és $g\colon]0, \infty] \to \mathbf{R},\ g(x) = \frac{1}{x}$,

d) $f\colon \mathbf{R} \setminus \{2\} \to \mathbf{R},\ f(x) = \frac{1}{x-2}$ és $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ g(x) = x^2 + 1$,

e) $f\colon]1, \infty[\to \mathbf{R},\ f(x) = x^2 + 2x$ és $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ g(x) = 3^x$,

f) $f\colon]0, \infty[\to \mathbf{R},\ f(x) = \log_2 x$ és $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ g(x) = x^3$,

g) $f\colon]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbf{R},\ f(x) = \cos x$ és $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ g(x) = \pi x$,

h) $f\colon]-\frac{1}{2}, \infty[\to \mathbf{R},\ f(x) = \sqrt{x + \frac{1}{2}}$ és $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ g(x) = \sin x$.

66. Feladat. Határozzuk meg a $g \circ f$ összetett függvényt az előző feladatban lévő függvények esetében!

67. Feladat. Határozzuk meg az $f \circ g \circ h$ összetett függvényt ha
$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = x^2,\ g\colon]0, \infty[\to \mathbf{R},\ g(x) = \log_3 x$ és $h\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ h(x) = \sin x$.

68. Feladat. A 9. Tétel alapján határozzuk meg az $f \circ g$ összetett függvény inverzét az alábbi függvények esetében:

a) $f\colon [1, \infty[\to \mathbf{R},\ f(x) = \sqrt{x-1}$ és $g\colon [0, \infty[\to \mathbf{R},\ g(x) = \sqrt{x} + 1$,

b) $f\colon [0, \infty[\to \mathbf{R},\ f(x) = \sqrt{x}$ és $g\colon \mathbf{R} \setminus \{-1\} \to \mathbf{R},\ g(x) = \frac{x}{x+1}$,

c) $f\colon [0, \infty[\to \mathbf{R},\ f(x) = x^2$ és $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ g(x) = 2^x$,

d) $f\colon \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R},\ f(x) = \frac{1}{x^2}$ és $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ g(x) = x^3$.

69. Feladat. Sorolja fel az $A = \{a, b, c\}$ hatványhalmazának elemeit!

70. Feladat. Adjuk meg a következő halmazrendszerek unióját és metszetét!

a) $\mathcal{A} := \{[\sqrt{x}, x] \colon x \in]1, \infty[\}$,

b) $\mathcal{A} := \left\{ \left] -\frac{1}{x}, 0 \right] \colon x \in]1, \infty[\right\}$,

c) $\mathcal{A} := \{A \setminus \{x\} \colon x \in B\}$.

71. Feladat. Legyen $\{A_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ egy halmazrendszer és B egy adott halmaz. Bizonyítsuk be, hogy

a) $B \setminus \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} B \setminus A_\gamma$,

b) $B \setminus \bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} B \setminus A_\gamma$.

72. Feladat. Legyen $\{A_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ és $\{B_\delta : \delta \in \Delta\}$ két halmazrendszer. Bizonyítsuk be, hogy

a) $\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right) \cap \left(\bigcup_{\delta\in\Delta} B_\delta\right) = \bigcup_{(\gamma,\delta)\in\Gamma\times\Delta} (A_\gamma \cap B_\delta)$,

b) $\left(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right) \cup \left(\bigcap_{\delta\in\Delta} B_\delta\right) = \bigcap_{(\gamma,\delta)\in\Gamma\times\Delta} (A_\gamma \cup B_\delta)$.

73. Feladat. Általánosítsuk és bizonyítsuk be az 5. és a 6. Tételeket halmazrendszer esetére is!

74. Feladat. Döntsük el, hogy az alábbi relációk közül melyek ekvivalenciarelációk és melyek rendezési relációk. Ekvivalenciareláció esetén adjuk meg a reláció által indukált osztályozást. Rendezési reláció esetén adjunk meg legalább egy láncot.

a) ϱ egy adott halmaz hatványhalmazán értelmezett és $A\varrho B \iff A \subseteq B$,

b) ϱ az egész számokon értelmezett és $x\varrho y \iff |x| = |y|$,

c) ϱ egy sík köreinek halmazán értelmezett és $x\varrho y \iff x$ és y koncentrikus körök, továbbá x sugara kisebb vagy egyenlő mint y sugara,

d) ϱ egy sík egyenesei halmazán értelmezett és $e\varrho f \iff e$ és f egyenesnek van legalább egy közös pontja.

75. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy két ekvivalenciareláció metszete is ekvivalenciareláció!

76. Feladat. Legyen ϱ az A halmazon értelmezett reláció. Bizonyítsuk be, hogy $\varrho \cup \varrho^{-1}$ és $\varrho \cap \varrho^{-1}$ szimmetrikus relációk!

77. Feladat. Legyen ϱ az A halmazon értelmezett reláció. Bizonyítsuk be, hogy ha ϱ reflexív és tranzitív, akkor $\varrho \circ \varrho = \varrho$! Igaz-e a megfordítás?

Ajánlott irodalom

[1] Delvin, Keith: *Sets, Functions, and Logic: An Introduction to Abstract Mathematics*, 3 edition, Chapman and Hall/CRC, 2003.

[2] Gecse Frigyes: *Matematikai alapok*, Z-press Kiadó Kft, Miskolc, 2013.

[3] Halmos, Paul: *Naive Set Theory*, Princeton, NJ: D. Van Nostrand Company, 1960. Reprinted by Springer-Verlag, New York, 1974.

[4] Kósa András: *Matematika – Halmazok, valós számok, függvények*, LSI Omak Alapítvány, 1990.

[5] Laczkovich Miklós -– T. Sós Vera: *Valós analízis I.*, Typotex ekiadó, Budapest, 2012.

[6] Leindler László – Schipp Ferenc: *Analízis I*, Tankönyvkiadó, 1985.

[7] Rimán János: *Matematikai analízis I*, Liceum, Eger, 2004.

[8] Rimán János: *Matematikai analízis feladatgyűjtemény I-II*, Liceum, Eger, 2004.

[9] Rudin Walter: *A Matematikai analízis alapjai*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978.

[10] Székelyhidi László: *Halmazok és függvények*, Palotadoktor Bt., Debrecen, 2008.

Tárgymutató