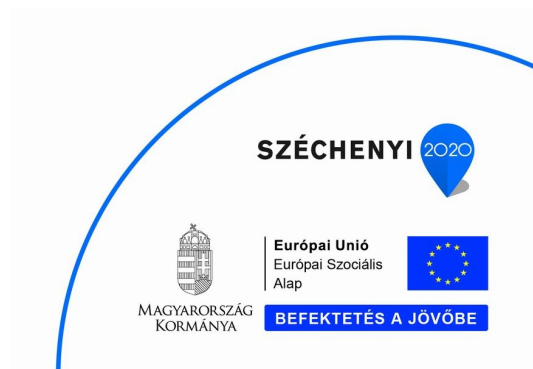


# VALÓS FÜGGVÉNYEK

TOLEDO RODOLFO



Valós függvények

PDF fájlformátumban megjelent elektronikus tananyag

Szerző: Dr. Toledo Rodolfo Calixto, főiskolai tanár

Nyíregyházi Egyetem

Matematika és Informatika Intézet

Készült: 2018. május 31.

Korrektúra: Barsy Anna

Lektorálta: Dr. Blahota István, főiskolai tanár

ISBN 978-615-6032-05-8

Készült az alábbi pályázati projekt támogatásával:

EFOP-3.5.1-16-2017-00017 „NYE-DUÁL- Új utakon a duális felsőoktatással a Nyíregyházi Egyetemen, az Északkelet-Magyarországi térség felemelkedéséért”



Szerzői jogok: Jelen tananyag a **Creative Commons: Nevezd meg! – Így add tovább! 4.0 Nemzetközi Licenc (CC BY-SA 4.0)** feltételeinek megfelelően szabadon felhasználható.

## Tartalomjegyzék

<b>1. Bevezetés</b>	<b>4</b>
<b>2. Valós függvények megadása</b>	<b>6</b>
<b>3. Valós függvények tulajdonságai</b>	<b>11</b>
<b>4. Elemi függvények</b>	<b>31</b>
4.1. Polinomok . . . . .	31
4.2. Racionális törtfüggvények . . . . .	37
4.3. Az $n$ -edik hatvány- és gyökfüggvény . . . . .	42
4.4. Az exponenciális és a logaritmus függvény . . . . .	44
4.5. Trigonometrikus függvények . . . . .	49
4.6. Trigonometrikus függvények inverzei . . . . .	61
<b>5. Függvények elemi ábrázolása</b>	<b>64</b>
<b>6. Nevezetes egyenlőtlenségek</b>	<b>73</b>
<b>7. Egyenlőtlenségek megoldása</b>	<b>80</b>
<b>8. Feladatok</b>	<b>85</b>
<b>Ajánlott irodalom</b>	<b>90</b>
<b>Tárgymutató</b>	<b>91</b>

## 1. Bevezetés

A matematikai analízis vizsgálatainak középpontjában a függvény áll. A függvény fogalma megszületésétől kezdve egyre bővült, az egymáshoz rendelt mennyiségek helyére egymáshoz rendelt matematikai objektumok léptek. Alkalmazhatóságuk szempontjából mégis azok a függvények maradnak előtérben, amelyek valós értékeket rendelnek egymáshoz. Általában ilyenekkel találkozunk más természettudományok diszciplínáiban, a közgazdaságtanban, stb, és alap- és középfokú tanulmányainkban is. Ezért elengedhetetlen egy külön tananyagot szentelni nekik.

A valós függvények értelmezésének legfontosabb módja a képlettel (formulával) való megadás, hiszen olyan műveletek állnak rendelkezésünkre, amikkel a már előzőleg definiált függvények is összekapcsolhatók. De nem minden számunkra fontos függvény adható meg a függvény változójával végzett véges számú alpművelettel. Ilyen például a négyzetgyök függvény, amelyet úgy értelmezünk, hogy az a függvény, amely minden nem negatív számhoz azt a nem negatív számot rendeli, amelynek négyzete az adott szám. A valós számokról szóló tananyagunkban azt tanultuk, hogy egy ilyen szám létezik, de nincs olyan képlet, amely ezt a számot előállítja az alpműveletek segítségével. Természetesen a négyzetgyök függvényt úgy is értelmezhetjük mint a négyzetfüggvény inverze a nem negatív számok halmozán. Ezért fontos megismerni a valós függvények különböző megadásának módjait, amely a 2. Rész célja.

A gyakorlatban nagyon gyakran a valós függvényeket képletekkel adjuk meg, amelyekben az alpműveletekkel és az összetett függvényképzéssel olyan függvényeket kapcsolunk össze, amelyeket részletesen ismerünk, hiszen nagy jelentőséggel bírnak számunkra. Ezek az ún. elemi függvények, és ilyenek a középiskolai tanulmányokban már szereplő első- és másodfokú, hatvány- és gyök-, exponenciális, logaritmus, és a trigonometrikus függvények, valamint ezek inverzei. Tananyagunk egyik fő célja ezen függvények precíz értelmezése és tulajdonságainak vizsgálata teljes matematikai szigorral. Ezzel a 4. Részben foglalkozunk.

Emiatt azonban ismerni kell azokat a tulajdonságokat, amivel a valós függvényeket tudjuk jellemezni. Ezek között a függvény zérushelyeit, monotonitását, konvexitását, periodicitását és paritását találjuk. Ezért már a 3. Részben foglalkozunk ezzel a témával. Ott megadjuk az egyes függvénytulajdonságok precíz fogalmát és olyan állításokat bizonyítunk, amelyekkel könnyebben tudjuk a következő részben vizsgált elemi függvények tulajdonságait igazolni. Itt számos megoldott feladattal segítjük elő a téma minél jobb megértését. Ez a rész azért is nagyon fontos, mert a későbbi tanulmányunkban foglalkozni fogunk teljes függvényvizsgálattal, és érdemes pontosan ismerni a vizsgálatot képző függvénytulajdonságokat.

A függvénytulajdonságok szorosan kapcsolódnak a függvényábrázoláshoz. Egyrészt a függvény grafikonjából leolvashatjuk legfontosabb tulajdonságait, másrészt a tulajdonságok pontos ismeretével el tudjuk készíteni a függvény vázlatos ábráját. A függvények grafikonja egy nagyon fontos szemléltethető eszköz, de elkészítéséhez sokszor differenciálszámítás szükséges, ami a matematikai analízis komoly eszköze, ezért későbbi tanulmányainkban szerepel. Azonban vannak olyan esetek, amikor

a függvény grafikonja egyszerűbb módon adható meg. Ilyen amikor ismert függvények grafikonjának darabolása vagy elemi transzformációk segítségével kapjuk meg a keresett függvény grafikonját, pl. ilyen a középiskolai tanulmányokban szereplő függvénytranszformáció. Érdeemes ezeket az egyszerű fogásokat megtanulni, amelyekről az 5. Részben tanulhatunk.

A tananyag utolsó két részében egyenlőtlenségekről lesz szó. A 6. Részben a matematikai analízis bizonyításaiban többször alkalmazott számtani, mértani, harmonikus és négyzetes közepek közötti egyenlőtlenségekről, valamint a Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-féle és a Bernoulli-féle egyenlőtlenségről tanulunk. Végül a 7. Részben alkalmazzuk az eddig tanultakat egyenlőtlenségek megoldására a valós számok halmazán és megoldási fogásokat mutatunk be konkrét példákon keresztül.

A tananyag feldolgozásának módszere a már kidolgozott

1. **Halmazok, relációk, függvények** [7]
2. **Valós számok** [8]

című tananyaghoz hasonló, azaz a matematikában szokásos négyes tagozódásból áll: definíció, tétel, bizonyítás, alkalmazás (feladatok). A jobb megértést elősegíti, hogy a definíciókat egyszerű példákkal szemléltetjük. A definiált fogalmakra tételeket mondunk ki és precízen bizonyítjuk ezeket. A tananyag teljes elsajátításához több mintafeladatot oldunk meg, néhányukat ábrával is illusztrálunk. Az **utolsó részben** feladatokat tűzünk ki megoldás nélkül, melyek a lehetséges gyakorlati foglalkozások anyagát képezhetik. Megoldásuk előtt javasoljuk a tananyagban megoldott feladatok tanulmányozását és megértését.

A fejezetben **N**, **Z** és **R** szimbólumokkal jelöljük a természetes, egész és valós számok halmazát. Ha külön nem jelöljük, akkor az előforduló betűk (latin, görög) mindig valós számokat jelentenek.

## 2. Valós függvények megadása

A függvény általános fogalmát a „**Halmazok, relációk, függvények**” című tananyagban vezettük be. Ebben a tananyagban csak olyan függvényekkel foglalkozunk, amelyek valós értékekhez szintén valós értékeket rendelnek.

**1. Definíció.** Azokat a függvényeket, amelyeknek értelmezési tartománya és értékkészlete valós számokból áll, **valós<sup>†</sup> függvényeknek** nevezzük.

<sup>†</sup>Valójában itt a valós-valós függvény elnevezés pontosabb lenne, de a rövidség kedvéért csak a valós függvény elnevezést használjuk.

A függvényekhez tartozó általános jelölésekről és azok megadási módjáról szintén a „**Halmazok, relációk, függvények**” című tananyagban tanultunk. Ebben a részben több olyan, a függvényekhez kapcsolódó elnevezés szerepel, amelynek fogalmát az előbb említett tananyagban lehet megtekinteni.

A valós függvények sajátossága, hogy hozzárendelési szabálya gyakran képlettel adható meg. Például az

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) = x^2 - 1$$

megadással  $f$  azt a másodfokú függvényt jelöli, amely minden valós számhoz hozzárendeli a szám négyzete mínusz egyet. Ha a  $g$  függvényt ugyanazzal a hozzárendelési szabállyal, de csak a pozitív számokra szeretnénk értelmezni, akkor a függvényt a

$$g: ]0, \infty[ \rightarrow \mathbf{R}, \quad g(x) = x^2 - 1$$

alakban adhatjuk meg, illetve ezt a

$$g(x) = x^2 - 1 \quad (x > 0)$$

módon is rövidíthetjük.

Vegyük észre, hogy a függvény megadásában nem szükséges szerepeltetni a pontos értékkészletét. Nem is lenne ez egyszerű feladat, hiszen a függvények értékkészlete gyakran csak teljes függvényvizsgálat után állapítható meg. Ezzel szemben a megadásból ki kell derülni a függvény értelmezési tartományának, hiszen két függvényt csak akkor tekinthetünk egyenlőnek, ha azonos értékekhez ugyanazt az értékeket rendelik. Például az előbb értelmezett  $f$  és  $g$  függvény nem egyenlő, mert értelmezési tartományuk nem egyezik meg. Ha mégsem szerepeltetjük az értelmezési tartományt, akkor azt a legbővebb valós számokból álló halmazt kell tekinteni, ahol a hozzárendelési szabály értelmezhető.

Az előzőek értelmében új függvényt kapunk, ha egy megadott **függvény leszűkítését** vesszük, azaz azonos hozzárendelési szabály mellett szűkebb értelmezési tartományon értelmezzük az új függvényt. Például az előbb értelmezett  $g$  függvény az  $f$  függvény leszűkítése a pozitív számok halmazára.

Nem minden függvény hozzárendelési szabálya fejezhető ki alpműveletekkel csak az  $x$  változó felhasználásával. Erre jó példa a gyökfüggvény megadása. A „Valós számok” című tananyagban igazoltuk, hogy minden  $x$  nem negatív számhoz egyetlen olyan nem negatív számot találunk, amelynek négyzete  $x$ -szel egyenlő. Ezt hívjuk a szám négyzetgyökének, amiről igazolható, hogy általában nem fejezhető ki alpműveletekkel. Ahhoz, hogy a továbbiakban egyszerűen tudunk hivatkozni a négyzetgyökre a  $\sqrt{\quad}$  jelet fogjuk használni, és vele már megadható az

$$f: [0, \infty[ \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) = \sqrt{x}$$

gyökfüggvény. Hasonló a helyzet a korábbi tanulmányainkból ismert szinusz függvénynel. Hozzárendelési szabályát koordinátageometriai eszközökkel adjuk meg, ami nem fejezhető ki alpműveletekkel. A szinusz függvényt más trigonometrikus, exponenciális és logaritmus függvényhez hasonlóan néhány betűs függvénynévvel fogjuk jelölni. Jelen esetben a  $\sin$  függvénynevet használjuk. A 4. részben megadjuk a középiskolában tanult függvények pontos fogalmát és igazoljuk legfontosabb tulajdonságait.

Megadott függvényekből az alpműveletekkel további függvényeket tudunk értelmezni a következő módon.

**2. Definíció.** Legyen  $f, g$  két valós függvény és  $c \in \mathbf{R}$ . Ekkor

- $f$   **$c$ -szere**se a  $(cf)(x) := cf(x)$ ,  $x \in D_f$  függvény,
- $f$  és  $g$  **összege** az  $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$ ,  $x \in D_f \cap D_g$  függvény,
- $f$  és  $g$  **különbsége** az  $(f-g)(x) := f(x) - g(x)$ ,  $x \in D_f \cap D_g$  függvény,
- $f$  és  $g$  **szorzata** az  $(fg)(x) := f(x)g(x)$ ,  $x \in D_f \cap D_g$  függvény,
- $f$  és  $g$  **hányadosa** az  $(f/g)(x) := f(x)/g(x)$ ,  
 $x \in D_f \cap D_g \setminus \{x \in D_g : g(x) = 0\}$  függvény.

Vegyük észre, hogy a fenti definícióban megadott műveletekkel értelmezett függvények értelmezési tartománya egyértelműen meghatározott, azaz az új függvényt ott értelmezzük, ahol  $f$  és  $g$  is egyszerre értelmezhető, valamint hányados esetén van még egy feltétel, nevezetesen ahol a  $g$  függvény értéke nem nulla, hiszen nullával nem tudunk osztani. Például az

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) = \sin x \quad \text{és} \quad g: [0, \infty[ \rightarrow \mathbf{R}, \quad g(x) = \sqrt{x}$$

függvények hányadosa

$$(f/g): ]0, \infty[ \rightarrow \mathbf{R}, \quad (f/g)(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}.$$

Egy másik mód, amivel megadott függvényekből további függvények értelmezhetők a „Halmazok, relációk, függvények” című tananyagban tanult függvények inverze és összetett függvények megadása.

A valós számok sajátos tulajdonsága, hogy egy számegyenesen elhelyezhetők, és ennek köszönhetően a valós függvények egy koordinátasíkon ábrázolhatók, szemléltethetők. Ehhez a

$$G_f := \{(x, f(x)) \in \mathbf{R}^2 : x \in D_f\}$$

halmaz elemeit, pontjait fogjuk a koordinátasíkon elhelyezni, melyet úgy nevezünk, hogy a **függvény grafikonja**. Könnyen igazolható, hogy két függvény grafikonja akkor és csak akkor egyenlő, ha a két függvény is egyenlő.

Gyakran előfordul, hogy a grafikon pontjai egy görbe vonalban állnak össze, melynek egyedi elnevezése lehet, vagy több ilyen görbe összetett alakzataként jelennek meg. A függvény grafikonját sokszor a függvény ábrája-, görbéje- vagy képeként is említik, akkor is, ha a grafikon néhány pontból áll. A függvényábrázolás a függvény grafikonjának egy vázlatos illusztrációja a koordinátasíkon, amely a függvény tulajdonságainak szemléltetésére szolgál.

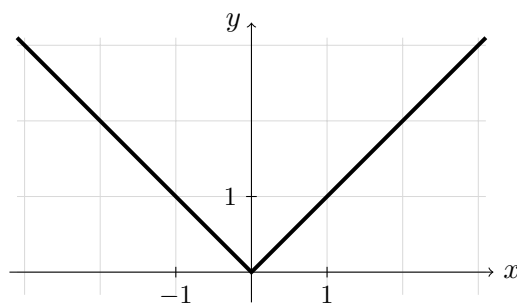
**1. Feladat.** *Ábrázoljuk a következő függvényeket!*

- a)  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = |x|,$   
 b)  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \text{sign } x,$   
 c)  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = [x],$  ahol  $[x]$  az  $x$  szám egészrésze,  
 d)  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \{x\},$  ahol  $\{x\}$  az  $x$  szám törtrésze.

*Megoldás:*

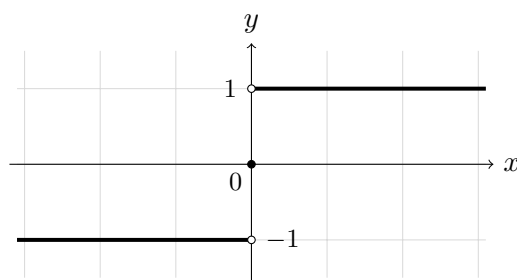
- a) Abszolút érték függvény

$$|x| := \begin{cases} x & \text{ha } x \geq 0, \\ -x & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$



- b) Szignum függvény

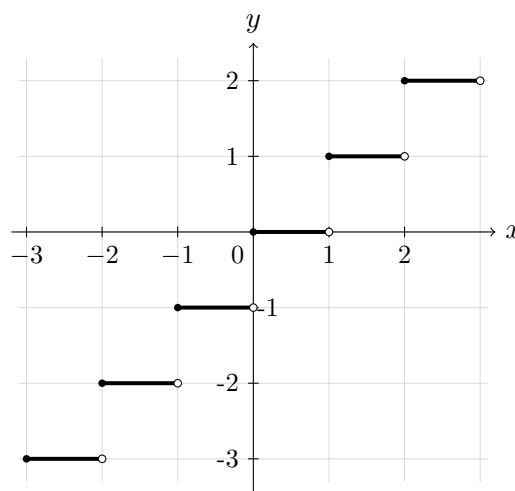
$$\text{sign } x := \begin{cases} 1 & \text{ha } x > 0, \\ 0 & \text{ha } x = 0, \\ -1 & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$





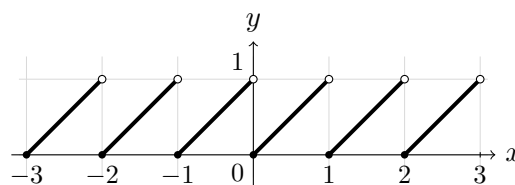
- c) Egészrész függvény: a legnagyobb egész szám, amely kisebb vagy egyenlő, mint  $x$ , azaz

$$[x] := \sup\{z \in \mathbf{Z} : z \leq x\}.$$



- d) Tötrész függvény

$$\{x\} := x - [x]$$



A grafikonok gyakran folytonos<sup>†</sup> görbedarabokból állnak. Ez látható az előző feladatban ábrázolt függvények grafikonjaiban, amelyek egyenes szakaszokból állnak. A koordinátatengelyekre olyan számadatokat tüntetünk fel, amelyek megadják a grafikon jellegzetességeihez kapcsolódó értékeket. Az ábrán nem kötelező a két tengelyt azonos mértékaránnyal szerepeltetni.

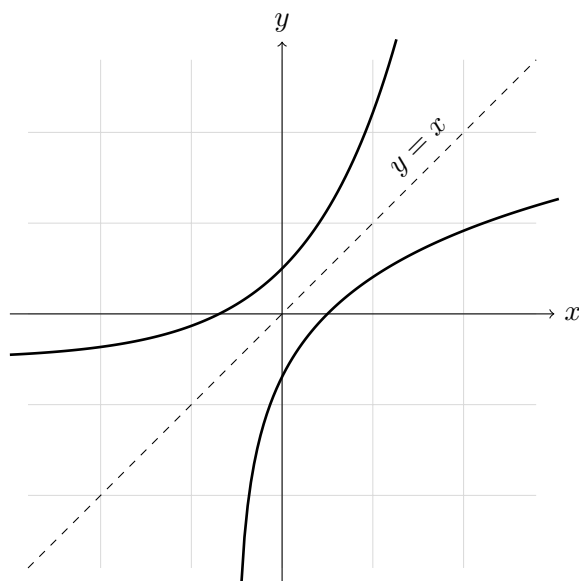
Természetesen vannak nem görbedarabokból álló grafikonok is, például az

$$f: \mathbf{R} \rightarrow [0, 1], \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \in \mathbf{Q}, \\ 1 & \text{ha } x \notin \mathbf{Q}. \end{cases}$$

ún. **Dirichlet-féle függvény** grafikonja.

A függvény grafikonja egy fontos szemléltető eszköz, ezért érdemes a valós függvényekkel kapcsolatos fogalmakat és tulajdonságokat a grafikonon illusztrálni, ha ez lehetséges. Például akkor van egy függvénynek inverze, ha grafikonja legfeljebb egyszer találkozik egy, az  $x$  tengellyel párhuzamos tetszőleges egyenessel. Ekkor úgy kapjuk meg az  $f$  függvény grafikonjából az inverz függvényének grafikonját, hogy tükrözzük az  $f$  grafikonját az  $y = x$  egyenesre.

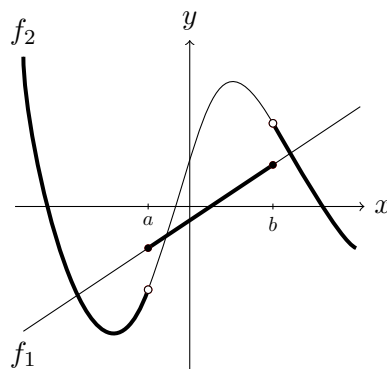
<sup>†</sup>A folytonosságot csak az analízis következő szemeszterében tanuljuk. Ebben a részben még a folytonosság intuitív fogalmát alkalmazzuk, azaz a „toll” felemelése nélkül rajzolható görbedarabot nevezünk folytonosnak.



Ha van egy „átlátszó” papírunk, akkor nincs szükség tükrözésre. Az  $f$  rajzolása után rögtön megnézhetjük inverzét grafikonját, ha először elforgatjuk a papírt 90 fokkal az óra járásával megegyező irányban, és utána függőlegesen megforgatjuk a papírt. Az az ábra, ami a papíron át látható, az  $f$  függvény inverzének grafikonja.

Végül a függvények megadásának egy olyan módjáról ejtsünk néhány szót, amikor a függvény értelmezési tartománya különböző esetekre van bontva, és ezekben más-más hozzárendelési szabály szerepel. Ezt jól példázza az 1. Feladatban ábrázolt abszolút érték függvény és előjelfüggvény. Az ilyen függvények ábrázolása úgy történik, hogy először ábrázoljuk az egyes esetekben szereplő hozzárendelési szabályokhoz tartozó függvényeket és az egyes grafikonokból „kivágjuk” az adott esetnek megfelelő részét. Ezután minden görbedarabot „egymás mellé” illesztünk. Ezt jól illusztrálja a következő ábra, ahol két „ismert” függvényből egy másikat csinálunk a fent leírt módszerrel.

$$f(x) := \begin{cases} f_1(x) & \text{ha } a \leq x \leq b, \\ f_2(x) & \text{egyébként.} \end{cases}$$



Erről néhány példát a 15. Feladatban találunk.

### 3. Valós függvények tulajdonságai

Ebben a részben a függvények legfontosabb tulajdonságaival foglalkozunk.

#### Pozitív függvények

**3. Definíció.** Ha  $f$  egy valós függvény és  $A \subseteq D_f$  úgy, hogy  $f(x) > 0$  minden  $x \in A$  esetén, akkor azt mondjuk, hogy  $f$  **pozitív az  $A$  halmazon**.  $A = D_f$  esetén csak annyit mondunk, hogy  $f$  **pozitív**.

Hasonlóan értelmezhetjük a nem negatív, negatív és nem pozitív függvény fogalmát a megfelelő relációjel megváltoztatásával. Pozitív függvények grafikonja az  $x$  tengely fölött, negatív függvények grafikonja az  $x$  tengely alatt van. A függvény ábrázolását megkönnyíti, ha tudjuk, hogy egy adott intervallumon a függvény pozitív vagy negatív.

Minden valós függvényt fel tudunk írni két nem negatív függvény különbségeként. Valóban, ha az  $f$  **függvény pozitív részét** az

$$f^+(x) := \begin{cases} f(x) & \text{ha } f(x) > 0, \\ 0 & \text{ha } f(x) \leq 0, \end{cases}$$

és **negatív részét** az

$$f^-(x) := \begin{cases} -f(x) & \text{ha } f(x) < 0, \\ 0 & \text{ha } f(x) \geq 0, \end{cases}$$

módon értelmezzük, akkor látjuk, hogy a fenti két függvény nem negatív, amire érvényes a következő állítás.

**1. Tétel.** Legyen  $f$  egy valós függvény. Ekkor

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x) \quad \text{és} \quad |f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$$

minden  $x \in D_f$  esetén.

*Bizonyítás.* Ha  $x \in D_f$ , és  $f(x) \geq 0$ , akkor  $f^+(x) = f(x)$  és  $f^-(x) = 0$ . Ekkor

$$\begin{aligned} f^+(x) - f^-(x) &= f^+(x) = f(x), \\ f^+(x) + f^-(x) &= f^+(x) = f(x) = |f(x)|. \end{aligned}$$

Ha  $x \in D_f$ , és  $f(x) < 0$ , akkor  $f^+(x) = 0$  és  $f^-(x) = -f(x)$ . Ekkor

$$\begin{aligned} f^+(x) - f^-(x) &= -f^-(x) = f(x), \\ f^+(x) + f^-(x) &= f^-(x) = -f(x) = |f(x)|. \end{aligned}$$

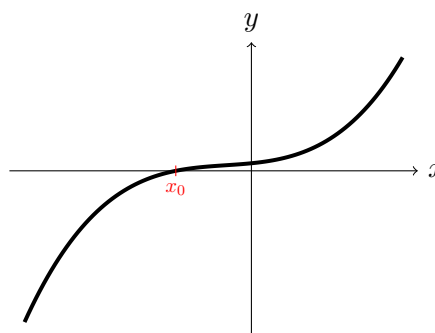
Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

Az előző tételből következik, hogy

$$f^+(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2}, \quad f^-(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2}.$$

**4. Definíció.** Legyen  $f$  egy valós függvény. A függvény **zérushelyeinek** vagy **gyökeinek** nevezzük azokat az  $x \in D_f$  számokat, amelyekre az  $f(x) = 0$  egyenlőség teljesül.

A zérushelyek azok a pontok, ahol a függvény az  $x$  tengellyel találkozik. Keresésük nagyon nehéz feladathoz vezethet, értékeik néha csak megközelítően adhatók meg.



### Korlátos függvények

A valós számhalmazok esetén a korlátosságról mint fogalomról a „Valós számok” című tananyagban tanultunk. Ezt a fogalmat most kiterjesztjük valós függvényekre is.

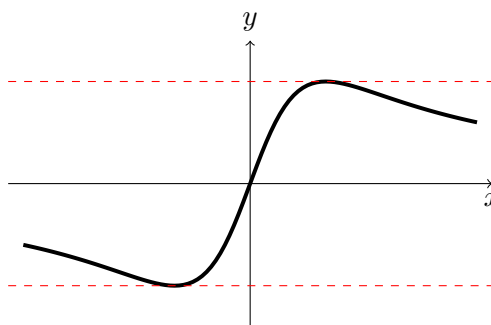
**5. Definíció.** Legyen  $f$  egy valós függvény és  $A \subseteq D_f$ .

- Ha van olyan  $k_1$  valós szám, hogy  $f(x) \leq k_1$  minden  $x \in A$  esetén, akkor azt mondjuk, hogy az  $f$  függvény **felülről korlátos** az  $A$  halmazon.
- Ha van olyan  $k_2$  valós szám, hogy  $f(x) \geq k_2$  minden  $x \in A$  esetén, akkor azt mondjuk, hogy az  $f$  függvény **alulról korlátos** az  $A$  halmazon.
- Ha az  $f$  függvény egyszerre felülről és alulról korlátos az  $A$  halmazon, akkor csak annyit mondunk, hogy **korlátos** az  $A$  halmazon.

Ha  $A = D_f$ , akkor a korlátosságot az egész függvényre mondjuk.

Nem nehéz igazolni, hogy az  $f$  függvény korlátossága az  $A$  halmazon pontosan megegyezik az  $f(A)$  képhalmaz korlátosságával. Másrészt az  $f$  függvény akkor és csak akkor korlátos, ha  $\exists k > 0$ , hogy  $|f(x)| \leq k$  minden  $x \in D_f$  esetén.

Azok a korlátos függvények, amelyeknek grafikonja két vízszintes vonal közé szorítható.



**2. Tétel.** Legyen  $f$  és  $g$  két korlátos valós függvény és  $c \in \mathbf{R}$ . Ekkor a függvények  $c$ -szerese, összege, különbsége és szorzata korlátos. Másrészt, ha  $f$  korlátos és  $\exists k > 0$ , hogy  $|g(x)| \geq k$  minden  $x \in D_f$  esetén, akkor az  $f/g$  függvény is korlátos.

*Bizonyítás.* Mivel  $f$  és  $g$  korlátos függvény, így  $\exists k_1, k_2 \in \mathbf{R}$ , hogy  $f(x) \leq k_1$  és  $g(x) \leq k_2$ . Az állítás első része a

$$\begin{aligned} |cf(x)| &= |c||f(x)| \leq |c|k_1, \\ |f(x) \pm g(x)| &\leq |f(x)| + |g(x)| \leq k_1 + k_2, \\ |f(x)g(x)| &\leq |f(x)||g(x)| \leq k_1k_2, \end{aligned}$$

abszolút érték tulajdonságok következménye. A második rész az

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = \frac{|f(x)|}{|g(x)|} \leq \frac{|f(x)|}{k} \leq \frac{k_1}{k}$$

egyenlőtlenségből adódik. Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

**2. Feladat.** Vizsgáljuk meg a következő függvényeket korlátosság szempontjából!

a)  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = 2x + 1$ ,

b)  $f: ]0, 1[ \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,

c)  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ .

*Megoldás:*

a)  $|2x + 1| < k \quad \implies \quad x < \frac{k-1}{2},$

de a valós számok halmaza felülről nem korlátos, így ilyen  $k$  szám nem létezik, azaz  $f$  nem korlátos.

b) Mivel  $x > 0$ , így  $x = |x|$ . Ezért

$$\left| \frac{1}{x} \right| < k \quad \implies \quad 0 < \frac{1}{k} < x.$$

Azonban, az  $x_0 = \frac{1}{2k}$  a  $]0, 1[$  intervallumnak eleme és kisebb, mint  $\frac{1}{k}$ , így van a  $]0, 1[$  intervallumnak olyan eleme, amely nem teljesíti az előző feltételt. Ezért  $f$  nem korlátos.

c) Mivel  $0 < \frac{1}{1+x^2} < 1$ , így  $f$  korlátos.

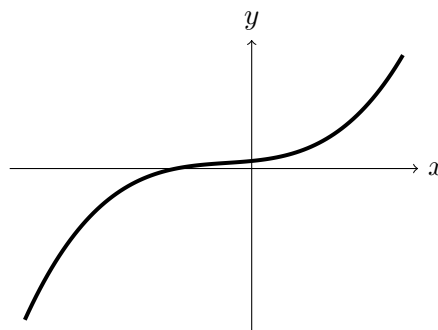
## Monoton függvények

**6. Definíció.** Legyen  $f$  egy valós függvény és  $A \subseteq D_f$ . Akkor mondjuk, hogy  $f$

- **monoton növekvő** az  $A$  halmazon, ha minden  $x < y$   $A$ -beli elem esetén igaz, hogy  $f(x) \leq f(y)$ ,
- **monoton csökkenő** az  $A$  halmazon, ha minden  $x < y$   $A$ -beli elem esetén igaz, hogy  $f(x) \geq f(y)$ ,
- **szigorúan monoton növekvő** az  $A$  halmazon, ha minden  $x < y$   $A$ -beli elem esetén igaz, hogy  $f(x) < f(y)$ ,
- **szigorúan monoton csökkenő** az  $A$  halmazon, ha minden  $x < y$   $A$ -beli elem esetén igaz, hogy  $f(x) > f(y)$ .
- **(szigorúan) monoton** az  $A$  halmazon, ha ott (szigorúan) monoton növekvő vagy csökkenő.

Az előző definícióhoz tartozik még, hogy ha nem mondjuk, hogy a függvény milyen halmazon monoton, akkor ezt az egész értelmezési tartományára értjük.

A szigorú monotonitás úgy jelentkezik a függvény grafikonján, hogy az értékek mindig emelkednek, vagy mindig csökkennek ahogy jobbra haladunk. Az ábra egy szigorúan monoton növekvő függvényt ábrázol.



**3. Feladat.** Legyen  $f$  és  $g$  két monoton növekvő függvény és  $c > 0$ . Igazoljuk, hogy ekkor  $cf$  és  $f + g$  szintén monoton növekvő függvények. Továbbá, ha  $f$  és  $g$  nemnegativitása is teljesül, akkor  $fg$  is monoton növekvő függvény lesz.

*Megoldás:* Legyen  $x < y$ . Mivel  $f$  és  $g$  monoton növekvő, így  $f(x) \leq f(y)$  és  $g(x) \leq g(y)$ . Ekkor a „Valós számok” című tananyagban tanult, a valós számok halmazán értelmezett rendezés tulajdonságaiból

$$cf(x) \leq cf(y) \quad \text{és} \quad f(x) + g(x) \leq f(y) + g(y)$$

adódik, amiből első állításunk következik. Hasonlóan

$$0 \leq f(x) \leq f(y) \quad \text{és} \quad 0 \leq g(x) \leq g(y) \quad \implies \quad f(x)g(x) \leq f(y)g(y),$$

amiből következik a második állítás.

Az előző feladat állítása igaz szigorúan monoton függvények esetén is. Nevezetesen, ha  $f$  és  $g$  két szigorúan monoton növekvő függvény, akkor a feladatban szereplő feltételek mellett  $cf$ ,  $f + g$  és  $fg$  szintén szigorúan monoton növekvő függvények. Ennek igazolása az előző feladat megoldásához hasonlóan történik. Hasonló állítás érvényes monoton csökkenő függvények esetén (lásd a 28. Feladatot).

**4. Feladat.** Legyen  $f$  és  $g$  két monoton függvény. Igazoljuk, hogy  $f \circ g$  monoton növekvő, ha  $f$  és  $g$  azonos monotonitású és monoton csökkenő, ha  $f$  és  $g$  különböző monotonitású.

*Megoldás:* Négy eset lehetséges az  $f$  és  $g$  monotonitásának megfelelően.

I. Ha  $f$  és  $g$  monoton növekvő, akkor

$$x < y \implies g(x) \leq g(y) \implies f(g(x)) \leq f(g(y)),$$

hiszen  $g(x), g(y) \in D_f$  két valós szám, amire alkalmazható az  $f$  monotonitásának definíciója. Ezért  $f \circ g$  monoton növekvő függvény.

II. Ha  $f$  és  $g$  monoton csökkenő, akkor

$$x < y \implies g(x) \geq g(y) \implies f(g(x)) \leq f(g(y)),$$

amiből következik, hogy  $f \circ g$  monoton növekvő függvény.

III. Ha  $f$  monoton növekvő és  $g$  monoton csökkenő, akkor

$$x < y \implies g(x) \geq g(y) \implies f(g(x)) \geq f(g(y)),$$

amiből következik, hogy  $f \circ g$  monoton csökkenő függvény.

IV. Ha  $f$  monoton csökkenő és  $g$  monoton növekvő, akkor

$$x < y \implies g(x) \leq g(y) \implies f(g(x)) \geq f(g(y)),$$

amiből következik, hogy  $f \circ g$  monoton csökkenő függvény.

A feladat megoldásából látható, hogy ha az  $f$  és  $g$  monoton függvények közül legalább az egyike szigorúan monoton, akkor  $f \circ g$  is szigorúan monoton lesz.

A következő tétel fontos szerepet játszik elemi függvények inverzeinek megadásában és monotonitásuk meghatározásában. Többek között következik belőle a gyök függvény szigorúan növekvő monotonitása.

**3. Tétel** (Az inverz függvény monotonitása). *Legyen  $f$  egy szigorúan monoton függvény az  $A$  halmazon. Ekkor  $f|_A$ , azaz az  $f$  függvény leszűkítése az  $A$  halmazra invertálható és inverze egy olyan szigorúan monoton függvény, melynek monotonitása az  $f$  függvénnyel megegyező.*

*Bizonyítás.* Indirekt módon tegyük fel, hogy  $f|_A$  nem invertálható. Ekkor  $\exists x_1, x_2 \in A$ , hogy  $f(x_1) = f(x_2)$ , de  $x_1 \neq x_2$ , azaz  $x_1 < x_2$  vagy  $x_1 > x_2$ . Így a szigorú monotonitás miatt  $f(x_1) < f(x_2)$  vagy  $f(x_1) > f(x_2)$ , ami ellentmondás.

Tegyük fel, hogy az  $f|_A$  függvény szigorúan monoton növekvő, de inverze nem az. Ebben az esetben  $\exists y_1, y_2 \in f(A)$ , hogy  $y_1 < y_2$ , de  $f|_A^{-1}(y_1) \geq f|_A^{-1}(y_2)$ . Jelölje  $x_1, x_2 \in A$  az  $y_1$  és  $y_2$  megfelelő  $f$ -szerinti ősképeit, azaz  $f(x_1) = y_1$  és  $f(x_2) = y_2$ . Mivel  $y_1 < y_2$ , így  $f(x_1) < f(x_2)$ , de  $x_1 \geq x_2$ , hiszen

$$x_1 = f|_A^{-1}(y_1) \geq f|_A^{-1}(y_2) = x_2.$$

Ez ellentmond a függvény szigorúan növekvő monotonitásának. Hasonlóan igazolható az állítás, ha  $f$  szigorúan monoton csökkenő függvény. Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

**5. Feladat.** *Vizsgáljuk a következő függvényeket monotonitás szempontjából!*

a)  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = 3x + 2$ ,

b)  $f: \mathbf{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x-1}$ ,

c)  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = [x]$ .

*Megoldás:*

a)  $x < y \implies 3x < 3y \implies 3x + 2 < 3y + 2$ , így  $f$  szigorúan monoton növekvő.

b) Nem monoton, mert  $f(0) = -1$ ,  $f(2) = 1$  és  $f(3) = \frac{1}{2}$ .

c) Monoton növekvő, mert a  $[x] := \sup\{z \in \mathbf{Z}: z \leq x\}$  összefüggés miatt, ha  $x < y$ , akkor

$$\{z \in \mathbf{Z}: z \leq x\} \subseteq \{z \in \mathbf{Z}: z \leq y\},$$

és bővebb halmaz szuprémuma nem lehet kisebb. De nem szigorúan monoton, mert  $f(0) = f(\frac{1}{2}) = 0$ .



## Szélsőértékek

**7. Definíció.** Legyen  $f$  egy valós függvény.

- Ha  $f$  felülről korlátos és van olyan  $x_0 \in D_f$  szám, hogy  $f(x_0) \geq f(x)$  minden  $x \in D_f$  esetén, akkor azt mondjuk, hogy az  $f$  **függvénynek maximuma** van az  $x_0$  pontnál.
- Ha  $f$  alulról korlátos és van olyan  $x_0 \in D_f$  szám, hogy  $f(x_0) \leq f(x)$  minden  $x \in D_f$  esetén, akkor azt mondjuk, hogy az  $f$  **függvénynek minimuma** van az  $x_0$  pontnál.

A fenti definícióban szereplő  $x_0$  pontot a függvény **maximumhelyének**, illetve **minimumhelyének** nevezzük. A függvény maximumhelye tehát az az értelmezési tartománybeli pont, ahol a függvény felveszi az értékkészlete legnagyobb értékét, amit a **függvény maximumának** mondunk. Hasonló a helyzet a függvény minimumhelyével, ahol a függvény felveszi az értékkészlete legkisebb értékét, amit a **függvény minimumának** mondunk. Például, az  $f(x) = x^2$  másodfokú függvénynek minimuma van az  $x_0 = 0$  pontnál. Ez tehát a függvény minimumhelye, és ott a függvény értéke 0, azaz a függvény minimuma nullával egyenlő.

Természetesen egy függvénynek nem biztos, hogy van maximuma vagy minimuma akkor is, ha korlátos. Például, az

$$f: ]1, \infty[ \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x}$$

függvény értékkészlete a  $]0, 1[$  nyílt intervallum, amelynek nincs se legnagyobb, se legkisebb eleme. Másrészt, egy függvénynek több maximumhelye és minimumhelye lehet. Ilyen például a szinusz függvény, amely végtelen sok pontnál veszi fel a maximumát, amelynek értéke 1, illetve minimumát, amelynek értéke  $-1$ .

**8. Definíció.** Legyen  $f$  egy valós függvény és  $x_0 \in D_f$ . Ha van olyan nyílt  $I$  intervallum, hogy  $x_0 \in I \subseteq D_f$  és

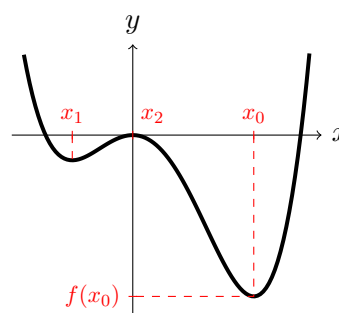
- $f(x_0) \geq f(x)$  minden  $x \in I$  esetén, akkor azt mondjuk, hogy az  $f$  **függvénynek helyi maximuma**<sup>†</sup> van az  $x_0$  pontnál.
- $f(x_0) \leq f(x)$  minden  $x \in I$  esetén, akkor azt mondjuk, hogy az  $f$  **függvénynek helyi minimuma**<sup>‡</sup> van az  $x_0$  pontnál.

<sup>†</sup>más néven lokális maximuma

<sup>‡</sup>más néven lokális minimuma

Ha egy függvénynek egy pontnál helyi maximuma van, akkor azt mondjuk, hogy ez a pont a függvény **lokális maximumhelye**. Hasonlóan **lokális minimumhelyről** is beszélhetünk. A lokális szó arra utal, hogy a pont nem feltétlenül a teljes értelmezési tartományra vonatkozó maximum- vagy minimumhely, ahogyan a 7. Definíció megköveteli, hanem csak egy „kisebb” intervallumra nézve. Hogy a két elnevezést jobban meg tudjuk egymástól különböztetni a teljes értelmezési tartományra vonatkozó maximum- vagy minimumhelyre az **abszolút maximumhely**, illetve az **abszolút minimumhely** elnevezést fogjuk alkalmazni.

Grafikusan jobban meg tudjuk mutatni az előző fogalmak közötti különbségeket. Az ábrán láthatjuk, hogy a függvénynek abszolút minimuma van az  $x_0$  pontnál. A minimum értéke  $f(x_0)$ . Az  $x_0$  pont szintén lokális minimumhelynek számít, de az  $x_1$  pont is az, hiszen mindkét esetben tudunk olyan nyílt intervallumot választani, ami tartalmazza a pontot és a pontban felvett függvényértéke az intervallumon felvett értékek közül a legkisebb. Hasonlóan látható, hogy a függvénynek lokális maximuma van az  $x_2$  pontnál, de a függvénynek nincs abszolút maximumhelye. Ez mutatja, hogy egy függvénynek több lokális maximum- vagy minimumhelye lehet, de nem biztos, hogy az egyik a függvény abszolút maximum- vagy minimumhelye lesz.



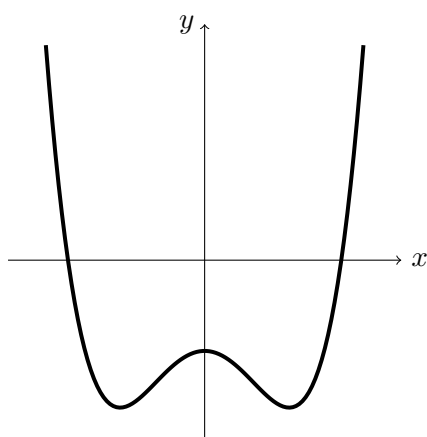
A lokális maximumhely egyik gyakori példája, amikor egy függvény egy  $]a, b[$  intervallumon értelmezett, és van olyan  $x^* \in ]a, b[$ , hogy a függvény monoton növekvő az  $]a, x^*[$  intervallumon, illetve monoton csökkenő az  $]x^*, b[$  intervallumon. Ekkor  $x^*$  maximumhelye lesz a függvénynek. Fordított monotonitás esetén  $x^*$  minimumhelye lesz a függvénynek.

## Paritás

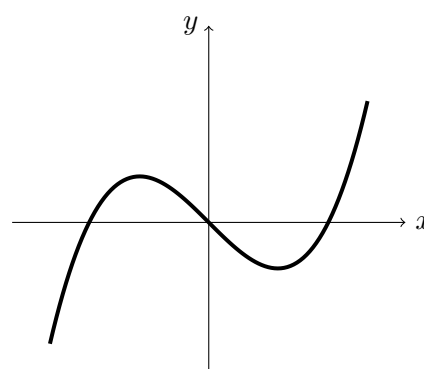
**9. Definíció.** Legyen  $f$  egy valós függvény és  $D_f$  egy 0-ra szimmetrikus halmaz, azaz ha  $x \in D_f$ , akkor  $-x \in D_f$ . Azt mondjuk, hogy

- $f$  **páros függvény**, ha  $f(-x) = f(x)$ , minden  $x \in D_f$  esetén,
- $f$  **páratlan függvény**, ha  $f(-x) = -f(x)$ , minden  $x \in D_f$  esetén.

A páros függvények grafikonja szimmetrikus az  $y$  tengelyre nézve, míg a páratlan függvények grafikonja szimmetrikus az origóra.



páros függvény



páratlan függvény

A páros, páratlan elnevezés abból ered, hogy az  $f(x) = x^n$  hatványfüggvény páros függvény, ha  $n$  páros, illetve páratlan függvény, ha  $n$  páratlan szám. Ezt igazolni fogjuk a 7. Feladatban. Azonban a páros és páratlan számokkal ellentétben az azonosan nulla függvény egyszerre páros és páratlan, bár ez az egyetlen ilyen függvény, illetve több olyan függvény van, ami se nem páros, se nem páratlan. Másrészt páros függvények összege és szorzata is páros, páratlan függvények összege is páratlan, de páratlan függvények szorzatának paritása függ attól, hogy páros vagy páratlan számú függvényt szorozunk össze. Hasonlóan, páratlan és páros függvények szorzatának paritása függ attól, hogy páros vagy páratlan számú páratlan függvényt szorozunk össze. Azonban páros és páratlan függvények összege általában se nem páros, se nem páratlan.

**6. Feladat.** Legyen  $g$  egy páros függvény. Igazoljuk, hogy ekkor tetszőleges  $f$  valós függvény esetén  $f \circ g$  szintén páros.

*Megoldás:*  $f \circ g$  értelmezési tartománya szimmetrikus, hiszen a  $g$  függvény értelmezési tartománya is az, illetve ha  $x \in D_g$  olyan, hogy  $g(x) \in D_f$ , akkor  $g(x) = g(-x)$  miatt  $g(-x) \in D_f$ . Ekkor  $f(g(-x)) = f(g(x))$ .

Hasonlóan igazolható, hogy két páratlan függvény összetett függvénye páros, és ha a belső függvény páratlan, a külső függvény páros, akkor az összetett függvény páratlan. Nyilvánvalóan egy páros függvény nem invertálható. Azonban ha a függvény páratlan és invertálható, akkor az inverz függvénye is páratlan. Ezt állítja a következő tétel.

**4. Tétel** (Az inverz függvény paritása). Legyen  $f$  egy invertálható páratlan függvény. Ekkor  $f^{-1}$  páratlan függvény.

*Bizonyítás.* Az  $R_f = D_{f^{-1}}$  szimmetrikus halmaz, mert ha  $y \in R_f$ , akkor van olyan  $x \in D_f$  szám, hogy  $y = f(x)$ , és mivel a függvény páratlan, így

$$-y = -f(x) = f(-x) \in R_f.$$

Ekkor  $f^{-1}(y) = x$  és  $f^{-1}(-y) = -x$ , amiből  $f^{-1}(-y) = -f^{-1}(y)$  következik. Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

**7. Feladat.** Vizsgáljuk a következő függvényeket paritás szempontjából!

a)  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x^n$ , ahol  $n \in \mathbf{N}$ ,

b)  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = |x|$ ,

c)  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ .

Megoldás:

a) Ha  $n$  páros, akkor  $n = 2k$ , ahol  $k \in \mathbf{N}$ . Ekkor

$$f(-x) = (-x)^{2k} = \left((-1)^2\right)^k x^{2k} = 1^k x^{2k} = x^n = f(x),$$

így  $f$  páros függvény.

Ha  $n$  páratlan, akkor  $n = 2k + 1$ , ahol  $k \in \mathbf{N}$ . Ekkor

$$f(-x) = (-x)^{2k+1} = (-1) \cdot \left((-1)^2\right)^k x^{2k+1} = -x^{2k+1} = -x^n = -f(x),$$

így  $f$  páratlan függvény.

b)  $f(-x) = |-x| = |-1||x| = |x| = f(x)$ , így  $f$  páros.

c)  $f(-x) = \frac{-x}{1+(-x)^2} = -\frac{x}{1+x^2} = -f(x)$ , így  $f$  páratlan.

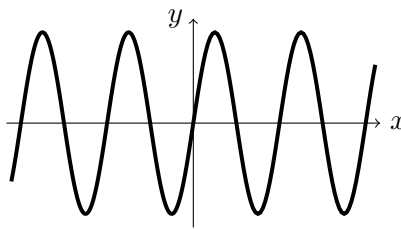
### Periodikus függvények

**10. Definíció.** Legyen  $f$  egy valós függvény és tegyük fel, hogy van olyan  $p > 0$  szám, amire minden  $x \in D_f$  esetén  $x + p \in D_f$  és

$$f(x + p) = f(x).$$

Ekkor azt mondjuk, hogy  $f$   **$p$ -szerint periodikus függvény** és  $p$  a függvény **periódusa**.

A periodikus függvények grafikonja végtelenszer ismétlődő szakaszokból áll. Erre jó példa a szinusz, koszinusz vagy az előző részben bemutatott törtrész függvény.



Nyilvánvaló, hogy egy periódus bármely pozitív egész többszöröse is periódus. Azonban nem mindig létezik legkisebb, ún. **alapperiódus**. Erre jó ellenpélda a teljes valós számok halmazára periodikusan kiterjesztett **Dirichlet-féle függvény**. Valóban nem nehéz igazolni, hogy minden  $p$  pozitív racionális szám periódusa lesz az előző függvénynek, hiszen két racionális szám összege racionális, így a függvény értéke 0, illetve egy irracionális és egy racionális szám összege irracionális, így a függvény értéke 1. Azonban nincs legkisebb racionális szám, tehát a függvénynek nincs legkisebb periódusa.

**8. Feladat.** Legyenek  $f$  és  $g$  ugyanazon a halmazon értelmezett periodikus függvények  $p$ , illetve  $q$  periódussal. Igazoljuk, hogy ha  $p/q$  racionális szám, akkor az  $f \pm g$ , az  $fg$  és az  $f/g$  függvény periodikus.

*Megoldás:* Az állítást  $f + g$  függvényre igazoljuk, a többi függvényre hasonlóan igazolható.

Ha  $\frac{p}{q}$  racionális, akkor  $\exists n, m \in \mathbf{N}$ , hogy  $\frac{p}{q} = \frac{m}{n}$ , azaz  $np = mq$ , amely közös értéket  $p^*$ -gal jelöljük. Mivel periódus pozitív egész többszöröse is periódus

$$(f + g)(x + p^*) = f(x + np) + g(x + mq) = f(x) + g(x) = (f + g)(x)$$

teljesül, azaz  $f + g$  periodikus függvény  $p^*$  periódussal.

### Konvex függvények

**11. Definíció.** Legyen  $f$  egy valós függvény és  $I \in D_f$  egy nyílt intervallum. Ha minden  $x, y \in I$ ,  $x \neq y$  és  $0 < \lambda < 1$  szám esetén igaz, hogy

- $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$ , akkor azt mondjuk, hogy  $f$  **konvex függvény az  $I$  intervallumon**,
- $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$ , akkor azt mondjuk, hogy  $f$  **konkáv függvény az  $I$  intervallumon**.

Szigorú egyenlőtlenségek esetén **szigorúan konvex** és **szigorúan konkáv** függvényekről beszélünk.

Szeretnénk megjegyezni, hogy az előbbi definícióban szereplő  $I$  nyílt intervallum nem feltétlenül egy véges intervallumot jelent, azaz lehet egy alulról vagy felülről nem korlátos nyílt intervallum, vagy akár a teljes valós számok halmaza. Másrészt elegendő azt feltételezni, hogy  $x < y$ , hiszen a definícióban  $x$  és  $y$ , illetve  $\lambda$  és  $1 - \lambda$  szerepet cserélhet.

Nézzük meg az előző definíció geometriai jelentését. Legyen  $x < y$  két tetszőleges valós szám és legyen  $z$  egy olyan szám, amely az  $]x, y[$  intervallumban található. Az  $x < z < y$  feltétel ekvivalens azzal, hogy

$$x - y < z - y < 0 \quad \iff \quad y - x > y - z > 0 \quad \iff \quad 1 > \frac{y - z}{y - x} > 0.$$

Legyen  $\lambda := \frac{y - z}{y - x}$ . Ebből  $z$  a következő módon fejezhető ki:  $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$ .

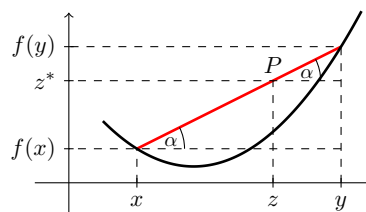
A fentiek értelmében  $z$  akkor és csak akkor eleme az  $]x, y[$  intervallumnak, ha van olyan  $0 < \lambda < 1$  szám, amire

$$z = \lambda x + (1 - \lambda)y$$

teljesül.

Az ábrán szereplő jelölések mellett legyen  $P$  az  $(x, f(x))$  és  $(y, f(y))$  koordinátájú pontokat összekötő szakasz azon pontja, amelynek koordinátái  $(z, z^*)$ . Ekkor

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f(y) - z^*}{y - z} = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

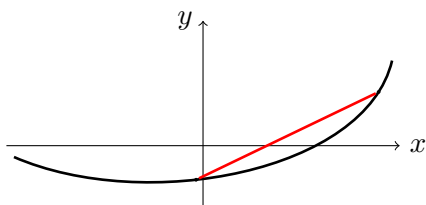


Az előző egyenlőségből az következik, hogy

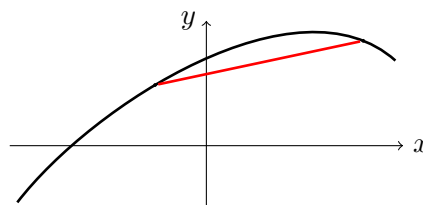
$$\frac{f(y) - z^*}{f(y) - f(x)} = \frac{y - z}{y - x} = \lambda,$$

amiből ki tudjuk fejezni a  $z^*$  értékét:  $z^* = \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$ .

A definíció értelmében  $f$  szigorúan konvex egy intervallumon akkor és csak akkor, ha  $f(z) < z^*$  minden  $z \in ]x, y[$  esetén, ahol  $x < y$  az intervallum két tetszőleges pontja. Más szavakkal, ha a függvény grafikonjának bármely két pontját összekötő egyenes szakasz a grafikon fölött van. Szigorúan konkáv függvényekre ez fordítva igaz.



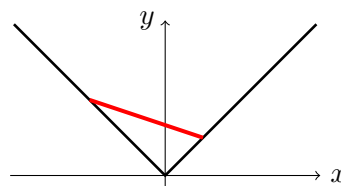
Szigorúan konvex függvény



Szigorúan konkáv függvény

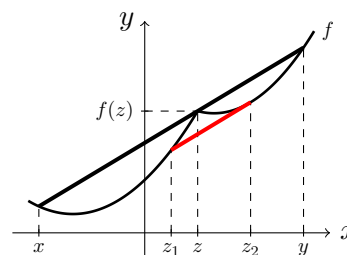
Természetesen egy függvény lehet konvex, de nem szigorúan konvex. Ez történik az  $f(x) = |x|$  függvényvel a teljes valós számok halmazán. A konvexitás azonnal következik az abszolút érték tulajdonságaiból (lásd a „Valós számok” című tanulmányt), hiszen minden  $x, y \in \mathbf{R}$  és  $0 < \lambda < 1$  esetén igaz, hogy

$$|\lambda x + (1 - \lambda)y| \leq |\lambda x| + |(1 - \lambda)y| = \lambda|x| + (1 - \lambda)|y|.$$



Ezért az  $f(x) = |x|$  függvény konvex. Azonban  $f$  nem szigorúan konvex, mert ha  $0 < x < y$ , akkor a fenti összefüggésben egyenlőséget írhatunk. Ez nem meglepő, hiszen  $f$  lineáris függvény, ha  $x > 0$ . Ezért ott a grafikon két pontját összekötő egyenes szakasz megegyezik a két pont közötti grafikondarabbal.

Az előző jelenség a következőképpen fordítható meg. Ha egy  $f$  függvény konvex, de nem szigorúan konvex egy  $I$  intervallumon, akkor van olyan  $I^* \subseteq I$  nyílt intervallum, ahol  $f$  lineáris függvény. Tudniillik egy ilyen  $f$  függvényhez találunk olyan  $]x, y[ \subseteq I$  intervallumot, amelynek van olyan  $z$  belső pontja, ahol  $f(z)$  az  $x$  és  $y$  értékhez tartozó grafikonbeli pontokat összekötő egyenes szakaszon van.



Tegyük fel, hogy a  $z_1 \in ]x, z[$  és a  $z_2 \in ]z, y[$  elemek közül legalább az egyik olyan, hogy az  $f$  szerinti képe az előbbi egyenes szakasz alatt van. Ekkor a  $z_1$  és a  $z_2$  értékhez tartozó grafikonbeli pontokat összekötő teljes egyenes szakasz szintén az előbbi egyenes szakasz alatt van. Azonban  $f$  konvex a  $]z_1, z_2[$  intervallumon,  $z \in ]z_1, z_2[$  és a fentiek alapján  $f(z)$  a  $z_1$  és a  $z_2$  értékhez tartozó grafikonbeli pontokat összekötő egyenes szakasz felett van, ami ellentmond a konvexitás fogalmának. Ebből következik, hogy az  $f$  függvény lineáris az  $]x, y[$  intervallumon. Az előző okfejtés hasonlóan igaz konkáv, de nem szigorúan konkáv függvények esetén is.

Fontos még megjegyezni, hogy minden lineáris függvény egyszerre konvex és konkáv, de nem szigorú értelemben.

Könnyen igazolható, hogy egy (szigorúan) konvex függvény mínusz egyszerese (szigorúan) konkáv és fordítva. Ugyanúgy azt sem nehéz igazolni, hogy két ugyanazon az intervallumon konvex függvény összege is konvex, és ha legalább az egyikük szigorúan konvex, akkor az összegfüggvény is szigorúan konvex. Szorzat esetén bizonyos feltételek mellett hasonlóan állíthatunk.

**5. Tétel.** *Legyen  $f$  és  $g$  két nem negatív, azonos szigorú monotonitású, konvex függvény az  $I$  intervallumon. Ekkor  $fg$  szigorúan konvex az  $I$  intervallumon.*

*Bizonyítás.* Legyen  $x, y \in I$ ,  $x < y$  és  $0 < \lambda < 1$ . Az  $f$  és  $g$  függvények konvexitásából következik, hogy

$$\begin{aligned} 0 &\leq f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y), \\ 0 &\leq g(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda g(x) + (1 - \lambda)g(y). \end{aligned}$$

Ha összeszorozzuk a fenti egyenlőtlenségeket, akkor azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} (fg)(\lambda x + (1 - \lambda)y) &= f(\lambda x + (1 - \lambda)y)g(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \\ &\leq \lambda^2 f(x)g(x) + \lambda(1 - \lambda)[f(x)g(y) + f(y)g(x)] + (1 - \lambda)^2 f(y)g(y) = \\ &= \lambda(\lambda - 1)[f(y) - f(x)][g(y) - g(x)] + \lambda f(x)g(x) + (1 - \lambda)f(y)g(y). \end{aligned}$$

Ha  $f$  és  $g$  azonos szigorú monotonitású függvények, akkor

$$\lambda(\lambda - 1)[f(y) - f(x)][g(y) - g(x)] < 0.$$

Ezért

$$\begin{aligned} (fg)(\lambda x + (1 - \lambda)y) &< \lambda f(x)g(x) + (1 - \lambda)f(y)g(y) = \\ &= \lambda(fg)(x) + (1 - \lambda)(fg)(y), \end{aligned}$$

amiből a tétel állítása következik.

Az előző tétel különböző variánsait megtaláljuk a 33. Feladatban. Érdekes külön foglalkozni az  $f = g$  esettel. Az előző tétel szerint, ha  $f$  nem negatív, szigorúan monoton és konvex egy intervallumon, akkor  $f^2$  is konvex, sőt teljes indukcióval igazolható, hogy az

$$f^n(x) := (f(x))^n$$

függvény szintén konvex az intervallumon minden  $n \in \mathbf{N}$  esetén.

**6. Tétel** (Az inverz függvény konvexitása). *Legyen  $f$  szigorúan monoton növekvő és (szigorúan) konvex az  $I$  nyílt intervallumon, továbbá tegyük fel, hogy  $f(I)$  szintén egy nyílt intervallum. Ekkor az  $f|_I$  függvény inverze (szigorúan) konkáv az  $f(I)$  intervallumon.*

*Bizonyítás.* A 3. Tételből tudjuk, hogy  $f|_I$ , azaz az  $f$  függvény lészűkítése az  $I$  intervallumra invertálható és inverze szigorúan monoton növekvő. Legyen  $y_1, y_2 \in f(I)$ ,  $y_1 < y_2$  és  $0 < \lambda < 1$ . Továbbá legyen  $x_1 := f^{-1}(y_1)$  és  $x_2 := f^{-1}(y_2)$ . Ekkor  $x_1, x_2 \in I$  és az inverz függvény monotonitása miatt  $x_1 < x_2$  következik. Másrészt a konvexitás miatt

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2),$$

és így a monotonitás miatt

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \leq f^{-1}(\lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)).$$

Ezért ha behelyettesítjük az  $y_1$ -t és  $y_2$ -t az utóbbi egyenlőtlenségbe, megkapjuk a

$$\lambda f^{-1}(y_1) + (1 - \lambda)f^{-1}(y_2) \leq f^{-1}(\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2)$$

igazolando összefüggést. Szigorú konvexitás esetén szigorú reláció jeleket írhatunk az előző egyenlőtlenségekbe. Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

Az előző tétel különböző variánsait megtaláljuk a 34. Feladatban.

**7. Tétel.** *Legyen  $g$  egy konvex (konkáv) függvény az  $I$  nyílt intervallumon, illetve  $I^*$  egy olyan nyílt intervallum, amire  $g(I) \subseteq I^*$  teljesül. Ha  $f$  egy olyan függvény, amely monoton növekvő és konvex (konkáv) az  $I^*$  intervallumon, akkor az  $f \circ g$  függvény konvex (konkáv) az  $I$  intervallumon.*

*Bizonyítás.* Legyen  $x, y \in I$  és  $0 < \lambda < 1$ . Ha a  $g$  függvény konvex, akkor

$$g(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda g(x) + (1 - \lambda)g(y).$$

Mivel  $g(x) \in I^*$  és  $g(y) \in I^*$ , illetve  $f$  monoton növekvő és konvex az  $I^*$  intervallumon, így

$$f(g(\lambda x + (1 - \lambda)y)) \leq f(\lambda g(x) + (1 - \lambda)g(y)) \leq \lambda f(g(x)) + (1 - \lambda)f(g(y)),$$

amiből következik, hogy az  $f \circ g$  függvény konvex az  $I$  intervallumon.

Ha  $g$  és  $f$  konkáv függvények, akkor az előző egyenlőtlenségekben fordított relációjeleket írhatunk, amiből következik, hogy az  $f \circ g$  függvény konkáv az  $I$  intervallumon. Ezzel a tétel állítását igazoltuk.



Felmerül a kérdés, hogy milyen további feltételek garantálják az  $f \circ g$  függvény szigorú konvexitását az előző tételben. Ehhez elég lenne, ha a tétel bizonyításában szereplő egyik egyenlőtlenség szigorú. Az első

$$f(g(\lambda x + (1 - \lambda)y)) < f(\lambda g(x) + (1 - \lambda)g(y))$$

egyenlőtlenség szigorú, ha  $g$  szigorúan konvex az  $I$  intervallumon és  $f$  szigorúan monoton növekvő. Ezért ez a két plusz feltétel elegendő arra, hogy  $f \circ g$  szigorúan konvex függvény legyen. A második

$$f(\lambda g(x) + (1 - \lambda)g(y)) < \lambda f(g(x)) + (1 - \lambda)f(g(y))$$

egyenlőtlenség esetén arra gondolnánk, hogy az  $f$  függvény szigorú konvexitása elegendő lenne. Ez nem igaz, mert  $g(x) = g(y)$  esetében a fenti egyenlőtlenség helyett egyenlőség áll fenn. Ez utóbbi eset nem történhet meg, ha  $g$  egy-egyértelmű függvény. Tehát ha a tétel feltételei mellett az  $f$  függvény szigorúan konvex az  $I^*$  intervallumon és a  $g$  függvény egy-egyértelmű, akkor az  $f \circ g$  függvény szigorúan konvex. Hasonló plusz feltételeket tehetünk arra, hogy  $f \circ g$  szigorúan konkáv függvény legyen. A pontos állításokat a 35. és a 36. Feladatokban találjuk.

Az előző tételhez kapcsolódó másik megjegyzés, hogy ha az  $f$  függvény monoton csökkenő, akkor az első egyenlőtlenség iránya megváltozik. Az ebből a tényből adódó pontos állításokat a 37., a 38. és a 39. Feladatokban találjuk.

**8. Tétel.** *Legyen  $f$  egy valós függvény, illetve  $a < b$  két pozitív, vagy két negatív valós szám.*

- *Tegyük fel, hogy az  $f$  függvény páratlan. Ekkor ha  $f$  (szigorúan) konvex az  $]a, b[$  intervallumon, akkor (szigorúan) konkáv az  $] -b, -a[$  intervallumon, illetve ha  $f$  (szigorúan) konkáv az  $]a, b[$  intervallumon, akkor (szigorúan) konvex az  $] -b, -a[$  intervallumon.*
- *Tegyük fel, hogy az  $f$  függvény páros. Ekkor ha  $f$  (szigorúan) konvex az  $]a, b[$  intervallumon, akkor (szigorúan) konvex az  $] -b, -a[$  intervallumon, illetve ha  $f$  (szigorúan) konkáv az  $]a, b[$  intervallumon, akkor (szigorúan) konkáv az  $] -b, -a[$  intervallumon.*

*Bizonyítás.* Igazolni fogjuk, hogy ha az  $f$  függvény páratlan és konvex az  $]a, b[$  intervallumon, akkor konkáv az  $] -b, -a[$  intervallumon. A többi eset igazolása hasonlóan történik.

Legyen  $x, y \in ] -b, -a[$ ,  $x \neq y$  és  $0 < \lambda < 1$ . Ekkor  $-x, -y \in ]a, b[$ . Mivel az  $f$  függvény páratlan és konvex az  $]a, b[$  intervallumon, ezért

$$\begin{aligned} -f(\lambda x + (1 - \lambda)y) &= f(\lambda(-x) + (1 - \lambda)(-y)) \leq \lambda f(-x) + (1 - \lambda)f(-y) = \\ &= -\lambda f(x) - (1 - \lambda)f(y) = -(\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)). \end{aligned}$$

Ebből következik, hogy

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y),$$

ami a tétel állítását igazolja.

**12. Definíció.** Legyen  $f$  egy valós függvény és  $I \in D_f$  egy nyílt intervallum. Ha minden  $x, y \in I$ ,  $x \neq y$  szám esetén igaz, hogy

- $$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2},$$

akkor azt mondjuk, hogy  $f$  **gyengén konvex függvény az  $I$  intervallumon**,

- $$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{f(x)+f(y)}{2},$$

akkor azt mondjuk, hogy  $f$  **gyengén konkáv függvény az  $I$  intervallumon**.

Szigorú egyenlőtlenségek esetén **szigorúan gyengén konvex** és **szigorúan gyengén konkáv** függvényekről beszélünk. A gyengén konvex vagy gyengén konkáv függvényeket **Jensen-konvex** vagy **Jensen-konkáv** függvényeknek is szokták nevezni.

Az előző definícióval gyengítettük a konvexitás fogalmát. Annyi történt valójában, hogy a fogalomban szereplő  $\lambda$  már nem egy tetszőleges  $]0, 1[$  intervallumbeli szám, hanem csak  $\lambda = \frac{1}{2}$  lehet. Tehát minden (szigorúan) konvex vagy (szigorúan) konkáv függvény egyben (szigorúan) gyengén konvex vagy (szigorúan) gyengén konkáv. Az új fogalom valóban gyengítés, hiszen van olyan gyengén konvex függvény, ami nem konvex.

Felmerülhet a kérdés, hogy akkor miért fontos foglalkozni a gyengén konvex tulajdonsággal. Kiderül, hogy bizonyos feltétel mellett a két tulajdonság ekvivalens és nyilván a gyenge konvexitás teljesülése könnyebben ellenőrizhető, mint a konvexitás.

A konvex és gyengén konvex közötti különbség megértésében fontos szerepet játszik a függvény folytonossága. Igazolható, hogy minden konvex függvény folytonos, de nem minden gyengén konvex függvény az. Azonban egy gyengén konvex folytonos függvény már konvex. A függvény folytonosságát csak egy későbbi tananyagban fogjuk tanulni.

Az előbbi kapcsolat a konvexitás és folytonosság között mutatja, hogy a gyengén konvexitás nem áll olyan mesze a konvexitástól, de ez tovább fokozható. Kiderül, hogy ha  $f$  gyengén konvex az  $I$  intervallumon és  $I$ -nek van olyan részintervalluma, ahol  $f$  felülről korlátos, akkor  $f$  már konvex az  $I$  intervallumon (lásd [3]).

A következő tétel az mondja ki, hogy a monoton függvények körében a gyenge konvexitás ekvivalens a „rendes” konvexitással.

**9. Tétel.** Legyen  $f$  egy valós függvény, amely monoton az  $I$  nyílt intervallumon. Ha  $f$  (szigorúan) gyengén konvex függvény az  $I$  intervallumon, akkor ott szintén (szigorúan) konvex függvény. Ugyanúgy, ha  $f$  (szigorúan) gyengén konkáv függvény az  $I$  intervallumon, akkor ott szintén (szigorúan) konkáv függvény.

*Bizonyítás.* Elegendő csak az első állítást igazolni, azaz amely a (szigorúan) gyengén konvex függvényekről szól. Ez azért van, mert ha  $f$  egy olyan monoton függvény, amely (szigorúan) gyengén konkáv, akkor  $-f$  monoton és (szigorúan) gyengén konvex. Ekkor az első állításból következik, hogy  $-f$  (szigorúan) konvex, és így  $f$  (szigorúan) konkáv függvény lesz.

Az első állítás igazolása több lépésben történik. Először azt fogjuk teljes indukcióval igazolni, hogy ha  $f$  gyengén konvex az  $I$  intervallumon, akkor

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{2^k}}{2^k}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{2^k})}{2^k} \quad (1)$$

minden  $x_1, x_2, \dots, x_{2^k} \in I$  esetén. Váloban,  $k = 1$  esetén a fenti egyenlőtlenség éppen a gyenge konvexitás fogalmát adja, tehát (1) teljesül  $k = 1$ -re. Másrészt, ha (1) teljesül valamely  $k$  pozitív szám esetén, akkor tetszőleges  $x_1, x_2, \dots, x_{2^{k+1}} \in I$  számokra az

$$y_1 := \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{2^k}}{2^k} \quad \text{és} \quad y_2 := \frac{x_{2^k+1} + x_{2^k+2} + \cdots + x_{2^{k+1}}}{2^k}$$

jelölés mellett nyilvánvaló, hogy  $y_1, y_2 \in I$ , valamint

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}\right) &= f\left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right) \leq \frac{f(y_1) + f(y_2)}{2} = \\ &= \frac{1}{2} f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{2^k}}{2^k}\right) + \frac{1}{2} f\left(\frac{x_{2^k+1} + x_{2^k+2} + \cdots + x_{2^{k+1}}}{2^k}\right) \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{2^k})}{2^k} + \frac{1}{2} \frac{f(x_{2^k+1}) + f(x_{2^k+2}) + \cdots + f(x_{2^{k+1}})}{2^k} = \\ &= \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{2^{k+1}})}{2^{k+1}}, \end{aligned}$$

azaz az állítás  $k + 1$ -re is igaz. Tehát (1) teljesül minden pozitív egész szám esetén. Ugyanúgy igazolható, hogy ha  $f$  szigorúan gyengén konvex, akkor (1)-ben szigorú egyenlőtlenséget kapunk.

A második lépés annak igazolása, hogy bármely  $n$  pozitív egész számra igaz, hogy

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n} \quad (2)$$

minden  $x_1, x_2, \dots, x_n \in I$  esetén.

Ezt az (1) egyenlőtlenség segítségével fogjuk belátni. Jelölje

$$s := \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \in I$$

és a következő levezetésben alkalmazzuk az (1) egyenlőtlenséget az

$$x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1} := s, x_{n+2} := s, \dots, x_{2^n} := s$$

számokra. Tehát

$$\begin{aligned} f(s) &= f\left(\frac{ns + (2^n - n)s}{2^n}\right) = f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{2^n}}{2^n}\right) \leq \\ &\leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{2^n})}{2^n} = \\ &= \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) + (2^n - n)f(s)}{2^n}. \end{aligned}$$

Ezért

$$2^n f(s) \leq f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) + (2^n - n)f(s),$$

amiből egy egyszerű átalakítás után (2) következik. Ugyanúgy igazolható, hogy ha  $f$  szigorúan gyengén konvex, akkor (2)-ben szigorú egyenlőtlenséget kapunk.

Ezek után azt igazoljuk, hogy minden  $x, y \in I$ ,  $x \neq y$  szám és  $0 < r < 1$  racionális szám esetén

$$f(rx + (1-r)y) \leq rf(x) + (1-r)f(y) \quad (3)$$

teljesül. Ehhez írjuk fel az  $r$  számot  $\frac{p}{n}$  alakban, ahol  $p$  és  $n$  olyan pozitív egész számok, amelyekre  $p < n$  és  $n \geq 2$  teljesül. Legyen tovább

$$x_1 := x, x_2 := x, \dots, x_p := x, x_{p+1} := y, x_{p+2} := y, \dots, x_n := y.$$

Ekkor (2)-ből azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} f\left(\frac{p}{n}x + \left(1 - \frac{p}{n}\right)y\right) &= f\left(\frac{px + (n-p)y}{n}\right) = f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) \leq \\ &\leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n} = \frac{pf(x) + (n-p)f(y)}{n} = \\ &= \frac{p}{n}f(x) + \left(1 - \frac{p}{n}\right)f(y), \end{aligned}$$

amiből (3) következik. Ugyanúgy igazolható, hogy ha  $f$  szigorúan gyengén konvex, akkor (3)-ban szigorú egyenlőtlenséget kapunk.

Végül legyen  $x, y \in I$ ,  $x < y$  és  $0 < \lambda < 1$  tetszőleges valós szám. Azt fogjuk igazolni, hogy

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \quad (4)$$

teljesül, ami az  $f$  függvény konvexitását jelenti. Ebben a lépésben már alkalmazni fogjuk az  $f$  függvény monotonitását. A

$$g_1(t) := tx + (1 - t)y = (1 - t)(y - x) + x$$

lineáris függvény monoton csökkenő, hiszen  $x < y$ . Tegyük fel először, hogy  $f$  monoton csökkenő függvény és legyen  $\lambda < r < 1$  egy tetszőleges racionális szám. Mivel  $g_1$  és  $f$  egyforma monotonitású, így  $f(g_1(\lambda)) \leq f(g_1(r))$ . Ezért (3) miatt

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq f(rx + (1 - r)y) \leq rf(x) + (1 - r)f(y)$$

teljesül. Ebből következik, hogy

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \inf\{rf(x) + (1 - r)f(y) : \lambda < r < 1, r \in \mathbf{Q}\}. \quad (5)$$

Azonban a

$$g_2(t) := tf(x) + (1 - t)f(y) = (1 - t)(f(y) - f(x)) + f(x)$$

lineáris függvény monoton növekvő, hiszen  $f$  monotonitása miatt  $f(x) \geq f(y)$ , és így nem nehéz igazolni, hogy

$$g_2(\lambda) = \inf\{g_2(r) : \lambda < r < 1, r \in \mathbf{Q}\}. \quad (6)$$

Valóban, ha  $f(x) = f(y)$ , akkor a  $g_2$  függvény állandó és így (6) nyilvánvalóan teljesül. Ha pedig igaz, hogy  $f(x) > f(y)$ , akkor  $g_2$  monotonitása miatt  $g_2(\lambda)$  alsó korlátja a

$$\{g_2(r) : \lambda < r < 1, r \in \mathbf{Q}\}$$

halmaznak. Másrészt, bármely  $g_2(\lambda) < \alpha < g_2(1)$  érték esetén nem nehéz igazolni, hogy

$$t_0 := \frac{f(y) - \alpha}{f(y) - f(x)}$$

olyan érték, amire  $g_2(t_0) = \alpha$  és  $\lambda < t_0 < 1$  teljesül. Ezért  $g_2$  monotonitása miatt, ha  $\lambda < r < t_0$  racionális szám, akkor  $g_2(\lambda) < g_2(r) < \alpha$ , és így  $\alpha$  nem lehet alsó korlátja a  $\{g_2(r) : \lambda < r < 1, r \in \mathbf{Q}\}$  halmaznak. Tehát  $g_2(\lambda)$  a halmaz infimuma, azaz (6) teljesül. (5)-ből és (6)-ból rögtön következik (4), hiszen

$$g_2(\lambda) = \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Ezzel igazoltuk az  $f$  függvény konvexitását.

Ha  $f$  monoton növekvő, akkor a bizonyítás az előzőekhez hasonlóan történik azzal a különbséggel, hogy a  $0 < r < \lambda$  racionális számokkal kell dolgozni, illetve  $g_2$  monoton csökkenő függvény lesz.

A szigorú konvexitással kapcsolatos állítás igazolásához abból indulunk ki, hogy minden  $x, y \in I$ ,  $x \neq y$  szám és  $0 < r < 1$  racionális szám esetén a (3)-ban szereplő egyenlőtlenség szigorú, ha az  $f$  függvény szigorúan gyengén konvex. Ha  $f$  konvex, de nem szigorúan konvex, akkor lesz olyan  $]x, y[$  intervallum, ahol az  $f$  függvény lineáris, és így

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) = \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

minden  $0 < \lambda < 1$  esetén. Azonban az előző okfejtés miatt az egyenlőség nem teljesülhet, ha  $r$  racionális szám, ami ellenmondás. Ezért az  $f$  függvény nem csak konvex, hanem szigorúan konvex is. Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

## 4. Elemi függvények

Említettük a valós függvényeknek azt a sajátosságát, hogy hozzárendelési szabályuk gyakran képlettel adható meg. Sokszor ezek a képletek az  $x$  függvényváltozóból és a trigonometrikus, illetve az exponenciális függvényekből kiindulva véges számú alapműveletekkel, állandókkal való szorzással, inverz és összetett függvényképzéssel állíthatók elő. Az ilyen módon előállított függvényeket **elemi függvényeknek** szokás nevezni. Ebben a részben a leggyakrabban előforduló elemi függvényeket tekintjük át.

### 4.1. Polinomok

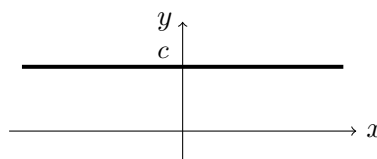
A **polinomok** vagy más néven **racionális egész függvények** azok a függvények, melyeknek képletét valós számok és az  $x$  függvényváltozó véges számú összeadásával és szorzásával kapjuk meg, azaz egy  $p$  polinom a

$$p: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

módon megadott függvény, ahol feltételezzük, hogy  $n$  egy nem negatív egész szám,  $a_k$  állandó valós szám minden  $k = 0, \dots, n$  esetén és  $a_n \neq 0$ . Ekkor az  $n$  számot a **polinom fokszámának**, az  $a_k$  állandókat **együtthatóknak** és az  $a_n$  állandót **főegyütthatónak** nevezzük. Az azonosan nulla függvényt 0 fokszámú polinomnak tekintjük.

A legegyszerűbb polinomok a **konstans függvények**, melyek minden valós számhoz hozzárendelik ugyanazt a  $c$  valós számot, azaz

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) = c.$$



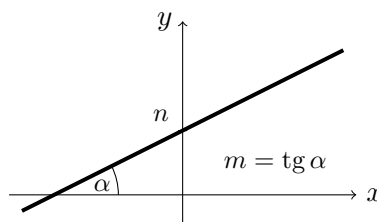
A konstans függvények grafikonja egy, az  $x$  tengellyel párhuzamos egyenes.

Középiskolában tanultuk az egyenes  $ax + by = c$  ún. normálvektoros egyenletét. Ha  $b \neq 0$ , vagyis kizárjuk az  $x$  tengelyre merőleges egyeneseket, akkor az előző egyenlet  $y = mx + n$  alakban írható fel. Ha még  $m \neq 0$  is teljesül, akkor azt mondjuk, hogy az

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) = mx + n$$

egy **elsőfokú vagy lineáris függvény**.

Az elsőfokú függvény grafikonja egy egyenes, amely nem párhuzamos egyik tengellyel sem. Az  $y$  tengelyt a  $(0, n)$  ponton szeli át és  $m$  az  $x$  tengely és az egyenes által bezárt szög tangense. Az  $m$  számot az egyenes **iránytangensének** vagy **meredekségének** nevezzük.



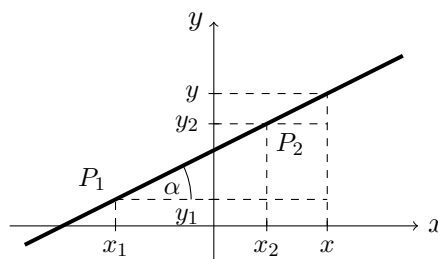
Nem nehéz igazolni, hogy ha  $m > 0$ , akkor az elsőfokú függvény szigorúan monoton növekvő, míg ha  $m < 0$ , akkor szigorúan monoton csökkenő. Továbbá minden elsőfokú függvénynek egyetlen egy zérushelye van az  $x_0 = -\frac{n}{m}$  helyen.

Az elsőfokú függvény grafikonját úgy célszerű ábrázolni, hogy megrajzoljuk két különböző pontját összekötő egyenest. E két pont meghatározása úgy történik, hogy szabadon kiválasztunk két értéket,  $x_1$ -et és  $x_2$ -öt és behelyettesítjük az elsőfokú függvény képletébe. Az így kapott  $y_1 = mx_1 + n$  és  $y_2 = mx_2 + n$  értékek adják a keresett pontok második koordinátáit.

Fordítva, ha egy adott egyeneshez tartozó elsőfokú függvény képletét szeretnénk meghatározni, akkor ismerni kell az egyenes meredekségét és az egyik pontját, vagy az egyenes két különböző pontját.

Tegyük fel, hogy az egyenes átmegy a  $P_1(x_1, y_1)$  és  $P_2(x_2, y_2)$  pontokon. Készítsünk ábrát! Az ábrán a tangens értelmezéséből a következő összefüggések láthatók

$$m = \operatorname{tg} \alpha = \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$



Ezért, ha ismerjük az egyenes  $m$  meredekségét és egyik  $P_1(x_1, y_1)$  pontját, akkor az egyeneshez tartozó elsőfokú függvény képlete

$$f(x) = mx + y_1 - mx_1,$$

illetve ha ismerjük az egyenes két különböző  $P_1(x_1, y_1)$  és  $P_2(x_2, y_2)$  pontját, akkor az egyeneshez tartozó elsőfokú függvény képlete

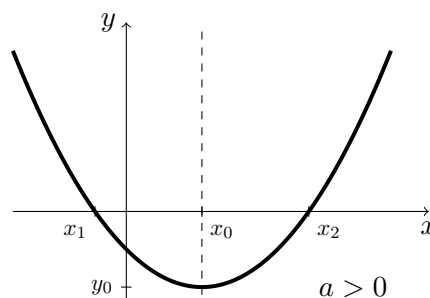
$$f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x + y_1 - mx_1.$$

**Másodfokú függvények** hívjuk azt az  $f$  függvényt, amely a következő módon írható

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) = ax^2 + bx + c,$$

ahol  $a, b, c$  állandó valós számok és  $a \neq 0$ .

A másodfokú függvény grafikonja egy parabola<sup>‡</sup>, melynek szimmetria tengelye párhuzamos az  $y$  tengellyel. Ha  $a > 0$  akkor a parabola felfelé nyílik, ellenkező esetben a parabola lefelé nyílik. Ez utóbbi állítás a **másodfokú kifejezés teljes négyzetté való átalakításából** következik. Valóban, egyszerű számításokkal nem nehéz igazolni, hogy



$$ax^2 + bx + c = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}.$$

<sup>‡</sup>Parabola a sík azon pontjainak halmaza, amelyek egyforma távolságban vannak egy ponttól és egy adott egyenestől.



Ekkor a másodfokú függvény grafikonját megkaphatjuk az  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x^2$  függvényből egyszerű függvénytranszformáció segítségével. Az  $f(x) = x^2$  grafikonját alkotó parabolát először el kell tolni az  $x$  tengely mentén úgy, hogy minimumhelye az

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

pontra kerüljön. Ezután  $|a|$ -szorosára megnyújtjuk az  $y$  tengely mentén, de ha  $a < 0$ , akkor még tükrözni kell a grafikont az  $x$  tengelyre. Végül úgy toljuk el az  $y$  tengely mentén, hogy az  $x_0$  helyen felvett értéke az

$$y_0 = c - \frac{b^2}{4a}$$

értékkel legyen egyenlő.

Ha a másodfokú függvény zérushelyeit keressük, akkor újra a másodfokú kifejezés teljes négyzetté való átalakítását hívjuk segítségül. Egyszerű átalakításokkal azt kapjuk, hogy az

$$a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} = 0$$

egyenlet átírható az

$$\left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

alakban. A fenti egyenlet akkor és csak akkor oldható meg, ha a  $D = b^2 - 4ac$ , ún. **diszkrimináns** értéke nem negatív. Ekkor négyzetgyökvonással ki tudjuk fejezni az  $x$  értékét, de három esetet kell megkülönböztetnünk.

- Ha  $D > 0$ , akkor a másodfokú függvénynek két különböző zérushelye van:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

- Ha  $D = 0$ , akkor a másodfokú függvénynek egyetlen zérushelye van:

$$x_0 = -\frac{b}{2a}.$$

- Ha  $D < 0$ , akkor a másodfokú függvénynek nincs zérushelye.

A másodfokú függvény monotonitását és konvexitását nem nehéz a grafikonjából megállapítani. Azt látjuk, hogy abszolút szélsőérték helye van az

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

pontnál. Ez minimumhely, ha  $a > 0$ , illetve maximumhely, ha  $a < 0$ . Ezért

- ha  $a > 0$ , akkor a függvény szigorúan monoton csökkenő a  $] -\infty, x_0]$  intervallumon, illetve szigorúan monoton növekvő az  $[x_0, \infty[$  intervallumon,
- ha  $a < 0$ , akkor a függvény szigorúan monoton növekvő a  $] -\infty, x_0]$  intervallumon, illetve szigorúan monoton csökkenő az  $[x_0, \infty[$  intervallumon.

Továbbá a másodfokú függvény konvex, ha  $a > 0$ , illetve konkáv, ha  $a < 0$ .

Szeretnénk megjegyezni, hogy a másodfokú függvény monotonitására és konvexitására vonatkozó eredmények következnek a 3. Feladatból valamint az 5. Tételből.

A másodfokú kifejezésekről fontos tudni még, hogy  $D > 0$  esetén átírhatók a következő módon

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

ahol  $x_1$  és  $x_2$  az  $f(x) = ax^2 + bx + c$  másodfokú függvény két különböző zérushelye. Ezt **gyöktényezős alaknak** hívjuk. Nem nehéz ezt igazolni, valóban

$$\begin{aligned} a(x - x_1)(x - x_2) &= a \left( x - \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \right) \left( x - \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \right) = \\ &= a \left( x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{D}}{2a} \right) \left( x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{D}}{2a} \right) = \\ &= a \left( \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{D}{4a^2} \right) = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = \\ &= a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} = ax^2 + bx + c. \end{aligned}$$

Hasonlóan igazolható, hogy ha  $D = 0$ , akkor

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2,$$

ahol  $x_0$  a másodfokú függvény egyetlen zérushelye. Mondhatjuk, hogy ez olyan, mint a  $D > 0$  eset, csak a két  $x_1$  és  $x_2$  zérushely megegyezik és  $x_0$ -val egyenlő. Ezért ilyenkor azt mondjuk, hogy  $x_0$  kétszeres zérushelye a másodfokú függvénynek.

Végül, az

$$a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2$$

átalakításból látható, hogy az előző kifejezés csak akkor lehet egyenlő az  $ax^2 + bx + c$  kifejezéssel, ha

$$-a(x_1 + x_2) = b \quad \text{és} \quad ax_1x_2 = c,$$

azaz

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{és} \quad x_1x_2 = \frac{c}{a},$$

hiszen  $a \neq 0$ . Ez utóbbi összefüggéseket **Viète-formuláknak** nevezik.

**François Viète** (1540-1603) francia jogász, parlamenti képviselő is volt. A matematikát kedvtelésből űzte. Matematikával – konkrétan trigonometriával – a csillagászaton keresztül kezdett foglalkozni. Bevezette az első egységes és áttekinthető algebrai írásmódot, pl. az egyenletek együtthatóit is betűkkel írta fel.

A másodfokú függvény grafikonjának segítségével egyszerű módon tudunk másodfokú egyenlőtlenségeket megoldani. Ez a következő módon történik. Alakítsuk át az egyenlőtlenséget úgy, hogy az

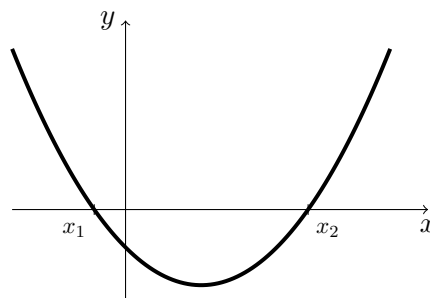
$$ax^2 + bx + c > 0 \quad \text{vagy} \quad ax^2 + bx + c < 0$$

alakot kapjuk, ahol  $a > 0$ . Ekkor az  $f(x) = ax^2 + bx + c$  másodfokú függvény grafikonja egy felfelé nyíló parabola. Most is a  $D = b^2 - 4ac$  diszkrimináns segítségével három esetet tudunk megkülönböztetni.

- Ha  $D > 0$ , akkor a másodfokú függvénynek két különböző zérushelye van:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{és} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

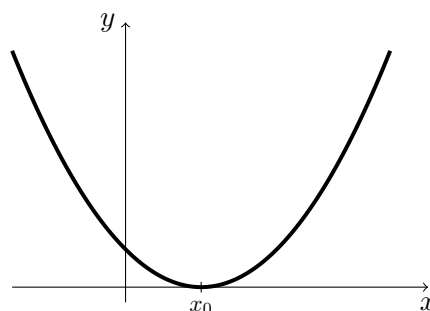
A parabola ezekben a pontokban metszi az  $x$  tengelyt. Ekkor az  $ax^2 + bx + c > 0$  egyenlőtlenség megoldása az  $x < x_1$  vagy  $x > x_2$ , hiszen ezekben az esetekben a parabola az  $x$  tengely felett van. Az  $ax^2 + bx + c < 0$  egyenlőtlenség megoldása az  $x_1 < x < x_2$ , hiszen ebben az esetben a parabola az  $x$  tengely alatt van.



- Ha  $D = 0$ , akkor a parabola az  $x$  tengely felett van, kivéve ha

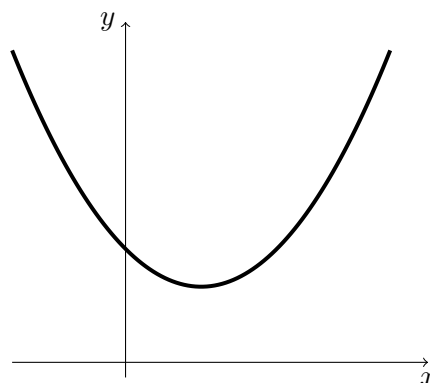
$$x_0 = -\frac{b}{2a}.$$

Ez a parabola minimumhelye és ott érinti az  $x$  tengelyt. Ezért az  $ax^2 + bx + c > 0$  egyenlőtlenség megoldása minden valós szám, kivéve az  $x = x_0$  számot, illetve az  $ax^2 + bx + c < 0$  egyenlőtlenségnek nincs megoldása.



- Ha  $D < 0$ , akkor a másodfokú függvénynek nincs zérushelye és a teljes parabola az  $x$  tengely felett van.

Ezért az  $ax^2 + bx + c > 0$  egyenlőtlenség megoldása minden valós szám, illetve az  $ax^2 + bx + c < 0$  egyenlőtlenségnek nincs megoldása.



A **három vagy annál nagyobb fokszámú polinomok** pontosabb vizsgálata már nem nélkülözheti a differenciálszámításon alapuló függvénydiszkusziót. Ez egy későbbi tananyag fő témája lesz. Ezért a következőekben bizonyítás nélkül mondunk ki olyan állításokat, amelyek segítenek a polinomok nagyon vázlatos ábrázolásában.

A polinomok grafikonja egy, a teljes valós számok halmazán értelmezett folytonos görbevonallal. Ha a polinom fokszáma  $n$ , akkor a polinomnak legfeljebb  $n$  darab zérushelye és  $n - 1$  darab szélsőérték helye lehet.

A polinom zérushelyeinek meghatározása nagy segítséget jelent az ábra elkészítésében. Sajnos a zérushelyszámítás nem mindig jár sikerrel. A másodfokú egyenlet megoldóképletét ismerjük. A harmad- és negyedfokú egyenletnek is van megoldóképlete, az ún. Cardano-képletek. Azonban az öt vagy annál nagyobb fokszámú polinomegyenleteket nem tudjuk általánosan megoldani, mert nem létezik olyan képlet, amely a polinom együtthatóiból előállítja a zérushelyeit.

Ez nem jelenti azt, hogy speciális esetekben nem tudnánk magasabb fokszámú polinomegyenleteket megoldani. Egy lehetséges módszer megsejteni a polinom egyik  $x_0$  zérushelyét és polinomosztással felírni  $(x - x_0)p_1(x)$  alakban. Így a további zérushelyek megkereséséhez az előző felírásban szereplő  $p_1$  polinomot kellene megvizsgálni, amely eggyel kisebb fokszámú, mint az eredeti polinom. Előfordulhat, hogy  $x_0$  szintén zérushelye a  $p_1$  polinomnak, és így az eredeti polinom már felírható  $(x - x_0)^2 p_2(x)$  alakban. Addig lehetne ezt folytatni, amíg a polinomunkat fel tudjuk írni  $(x - x_0)^k p_k(x)$  alakban, ahol  $x_0$  már nem zérushelye a  $p_k$  polinomnak. Ekkor azt mondjuk, hogy az  $x_0$  szám  $k$ -szoros gyöke az eredeti polinomnak.

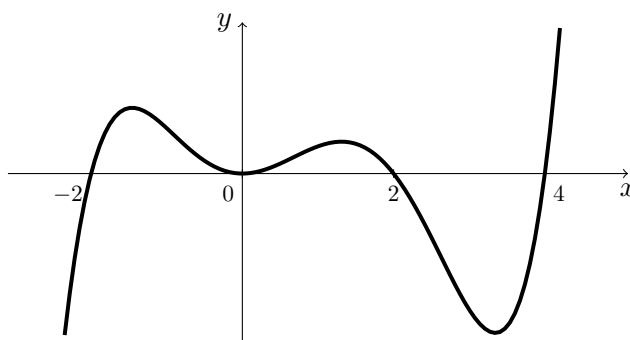
Tudjuk, hogy egy függvény zérushelye olyan pont, ahol a függvény grafikonja az  $x$  tengellyel találkozik. Ha egy zérushely  $k$ -szoros gyöke a polinomnak és  $k$  páratlan szám, akkor a grafikon átszeli az  $x$  tengelyt. Ha pedig  $k$  páros szám, akkor nem szeli át, csak érinti az  $x$  tengelyt. Ezt felhasználjuk a grafikon elkészítéséhez.

Még valami, a polinomok nem korlátos függvények. A pozitív számok irányába egy idő után az értékek határon túl nőni vagy csökkenni kezdenek attól függően, hogy főegyütthatója nagyobb vagy kisebb, mint nulla. Ha a negatív számok irányába nézzük, akkor az eredmény függ még a polinom fokszámának paritásától is. Ha a főegyüttható pozitív és a fokszám páros, vagy a főegyüttható negatív és a fokszám páratlan, akkor egy idő után a polinom értékei minden határon túl nőnek, ahogy a változó abszolút értéke nő. A többi esetben a polinom értékei minden határon túl csökkennek, ahogy a változó abszolút értéke nő.

Lássuk egy példát! A  $p(x) = x^5 - 4x^4 - 4x^3 + 16x^2$  polinom felírható

$$p(x) = x^2(x - 2)(x - 4)(x + 2)$$

alakban. Ekkor  $x = -2$ ,  $x = 2$  és  $x = 4$  egyszeres gyöke a polinomnak, míg  $x = 0$  kétszeres gyöke. A polinom főegyütthatója 1, ami pozitív szám, és fokszáma 5, ami páratlan szám. Az alábbi ábra mutatja a polinom grafikonját.



Az előbbi módszerrel ábrázolt grafikon nem pontos, hiszen például nem tudjuk vele meghatározni a polinom szélsőérték helyeit.

Fontos még megjegyezni, hogy bár nem mindig tudunk polinomegyenleteket megoldani, a megoldásokat közelítőleg meg tudjuk találni numerikus módszerekkel. Érdeemes megismerkedni a komputeralgebrai rendszerekben rejlő lehetőségekkel.

**Gerolamo Cardano** (1501-1576) itáliai orvos, filozófus és matematikus volt. Annak ellenére, hogy házasságon kívül született, hihetetlenül szívós természetének köszönhetően elérte, hogy híresebb orvos az ő idejében Európában nem volt és számos filozófiai, orvosi és matematikai művet írt. Nevével tanulmányaikban a harmad- és negyedfokú egyenletek megoldóképlete mellett találkozunk. Fontos felfedezései voltak még a hidrodinamikában, a mechanikában, a valószínűségszámításban és a geológiában. Róla nevezték el például a kardántengelyt.

Azonban a harmad- és negyedfokú egyenletek megoldóképletét nem Cardano fedezte fel, de ő publikálta először. Cardano becsületére legyen mondva, a felfedezést soha nem tartotta magáénak. A megoldóképletek születéséről szóló történet a matematikatörténet leghíresebb fejezetei közé tartozik, amiről bővebben olvashatunk [5]-ben.

## 4.2. Racionális törtfüggvények

A **racionális törtfüggvények** azok függvények, amelyek felírhatók két polinom hányadosaként. Más szavakkal, racionális törtfüggvényről beszélünk, ha találunk olyan  $a_0, a_1, \dots, a_n$ , illetve  $b_0, b_1, \dots, b_m$  valós számokat, hogy a függvény az

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}$$

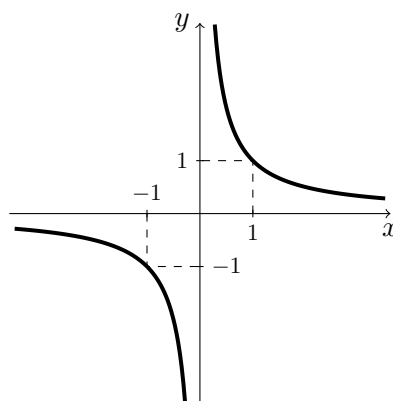
képlettel írható fel, ahol  $a_n \neq 0$  és  $b_m \neq 0$ . A racionális törtfüggvény értelmezési tartománya a valós számok halmaza, kivéve a nevezőben lévő polinom zérushelyeit.

A polinomok is racionális törtfüggvények, hiszen a nevezőben lévő polinom lehet a konstans, nem azonosan nulla függvény.

A legegyszerűbb racionális törtfüggvény, amely már nem polinom, a **reciprok függvény**. Ennek értelmezése a következő:

$$f: \mathbf{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x}.$$

A reciprok függvény grafikonja egy hiperbola § és így két folytonos görbedarabból áll. Nem nehéz igazolni, hogy a reciprok függvény páratlan, illetve csak a  $] -\infty, 0[$  vagy csak a  $]0, \infty[$  intervallumon tekintve szigorúan monoton csökkenő (lásd a 41. Feladatot).



A reciprok függvény szigorúan konvex a  $]0, \infty[$  intervallumon. Valóban, minden  $0 < x < y$  és  $0 < \lambda < 1$  esetén

$$\frac{1}{\lambda x + (1 - \lambda)y} < \lambda \frac{1}{x} + (1 - \lambda) \frac{1}{y}$$

teljesül, hiszen

$$\begin{aligned} (\lambda x + (1 - \lambda)y) \left( \lambda \frac{1}{x} + (1 - \lambda) \frac{1}{y} \right) &= \lambda^2 + (1 - \lambda)^2 + \lambda(1 - \lambda) \left( \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) > \\ &> \lambda^2 + (1 - \lambda)^2 + 2\lambda(1 - \lambda) = (\lambda + (1 - \lambda))^2 = 1. \end{aligned}$$

Az előbbi levezetésben azt alkalmaztuk, hogy az  $\frac{x}{y}$  és  $\frac{y}{x}$  számok szorzata 1, ezért a számtani és a mértani közepek közötti egyenlőtlenségből következik, hogy összegük nagyobb, mint 2 (lásd a 13. Tételt).

Mivel a reciprok függvény páratlan, ezért a 8. Tételből következik, hogy szigorúan konkáv a  $] -\infty, 0[$  intervallumon.

A reciprok függvény invertálható és inverze önmaga. Valóban, minden  $a, b \neq 0$  valós szám esetén az

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b}$$

egyenlőségből következik, hogy  $a = b$ , illetve ha  $y = \frac{1}{x}$ , akkor  $x = \frac{1}{y}$  minden  $x, y \neq 0$  esetén.

Egy másik nevezetes racionális törtfüggvény a **lineáris törtfüggvény**. Nevezetesen az

$$f: \mathbf{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\} \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}.$$

módon megadott függvény, ahol  $a, b, c$  és  $d$  valós számok, illetve  $c \neq 0$  és  $bc \neq ad$ . Alkalmazzuk az

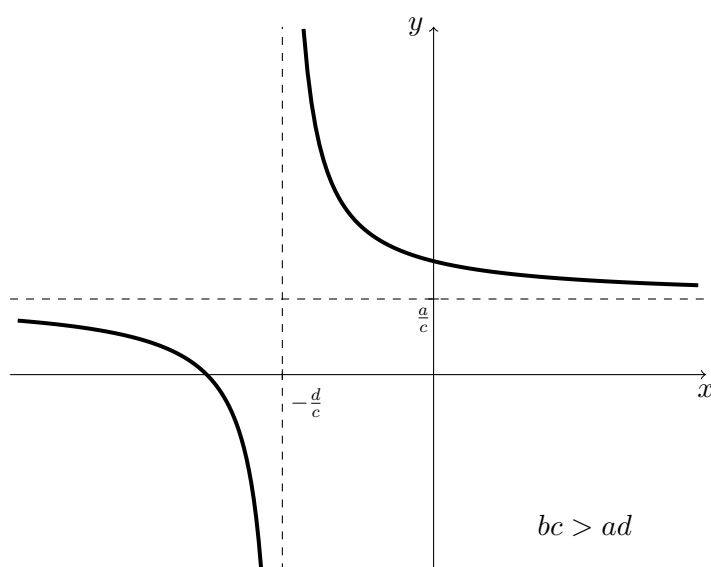
$$ax + b = \frac{a}{c}(cx + d) + \frac{bc - ad}{c}$$

§A hiperbola azon pontok halmaza, melyeknek két rögzített ponttól való távolsága különbségének abszolút értéke állandó.

átalakítást arra, hogy átírjuk a lineáris törtfüggvényt a következő alakban

$$\frac{ax + b}{cx + d} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2} \cdot \frac{1}{x + \frac{d}{c}}.$$

Ebből azt látjuk, hogy a lineáris törtfüggvény grafikonját megkaphatjuk a reciproknak függvényből függvénytranszformáció segítségével. Első lépésben eltoljuk a reciproknak függvényt az  $x$  tengely mentén úgy, hogy függőleges szimmetriatengelye legyen az  $x = -\frac{d}{c}$  egyenes. Majd az így kapott grafikont nyújtjuk vagy zsugorítjuk az  $y$  tengely mentén a  $\frac{bc-ad}{c^2}$  szám abszolút értéke-szorosával. Ha  $bc < ad$ , akkor a grafikont még tükrözni kell az  $x$  tengelyre. Végül a kapott grafikont eltoljuk az  $y$  tengely mentén úgy, hogy vízszintes aszimptotája az  $y = \frac{a}{c}$  egyenes legyen. A következő ábra egy lineáris törtfüggvény grafikonját mutatja  $bc > ad$  esetén.



Ezek után már nem nehéz megállapítani a függvénytranszformációval kapott lineáris törtfüggvény monotonitási és konvexitási szakaszait. Ezt az olvasóra fogjuk bízni (lásd a 42. Feladat). Szeretnénk még megjegyezni, hogy minden lineáris törtfüggvény invertálható és inverz függvénye szintén lineáris törtfüggvény (lásd a 43. Feladatot).

Végül szeretnénk néhány általános megállapítást tenni a racionális törtfüggvények grafikonjáról. Rögtön szögezzük le, hogy differenciálszámításon alapuló függvénydiszkusszió nélkül nagyon ritkán tudjuk a grafikont elkészíteni, de ez esetben a számlalóban és a nevezőben szereplő polinomok zérushelyei alapján csinálhatunk egy nagyon vázlatos ábrát. Foglaljuk össze, hogyan befolyásolják ezek a zérushelyek az elkészítendő grafikont!

- Ha  $x_0$   $k$ -szoros gyöke a számlalóban lévő, de nem gyöke a nevezőben lévő polinomnak, akkor  $x_0$  zérushelye lesz a racionális törtfüggvénynek. Ekkor a polinomokhoz hasonlóan, ha  $k$  páratlan szám, akkor a grafikon átszeli az  $x$  tengelyt, de ha  $k$  páros szám, akkor nem szeli át, csak érinti az  $x$  tengelyt.

- Ha  $x_0$  nem gyöke a számlálóban lévő, de  $k$ -szoros gyöke a nevezőben lévő polinomnak, akkor azt mondjuk, hogy  $x_0$  pólushelye a racionális törtfüggvénynek. A pólushelyek sajátossága, hogy a függvény nem korlátos az  $x_0$  pont környezetében és a grafikonja egyre jobban megközelíti az  $x = x_0$  függőleges egyenest, de nem éri el. Láttunk már ilyet a reciproktörtfüggvény  $x = 0$  pontja esetén. Ha  $k$  páratlan szám, akkor a függvény előjele különbözik az  $x_0$  pont bal- és jobboldali környezetében, de ha  $k$  páros szám, akkor a két előjel megegyezik.
- Ha  $x_0$   $k$ -szoros gyöke a számlálóban lévő és  $l$ -szoros gyöke a nevezőben lévő polinomnak, valamint  $k \geq l$ , akkor  $(x - x_0)^l$ -nel tudjuk egyszerűsíteni mind a két polinomot és a megmaradt racionális törtfüggvényt vizsgálhatjuk tovább. De vigyázzunk, mert az egyszerűsített képlet értelmezhető az  $x_0$  pontban, de az eredeti nem. Más szavakkal, az egyszerűsített függvény grafikonja folytonosan megy át az  $x_0$  pontban, de az eredeti függvény menete ott megszakad. Ezért csak annyit teszünk, hogy a grafikont egy üres karikával „kilyukasztjuk” az  $x_0$ -hoz tartozó helyen, amivel azt jelezzük, hogy az eredeti racionális törtfüggvény nem értelmezhető ebben a pontban.
- Ha  $x_0$   $k$ -szoros gyöke a számlálóban lévő és  $l$ -szoros gyöke a nevezőben lévő polinomnak, valamint  $k < l$ , akkor  $(x - x_0)^k$ -nel tudjuk egyszerűsíteni mind a két polinomot. Ebben az esetben az eredeti és az egyszerűsített racionális törtfüggvény teljesen azonos, egyik sem értelmezhető az  $x_0$  pontban. Mivel  $x_0$  továbbra is zérushelye lesz az egyszerűsített függvény nevezőjének, ezért pólushelye lesz a racionális törtfüggvénynek.

Egy racionális törtfüggvény lehet korlátos függvény. Valóban az

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

függvény minden értéke nagyobb, mint 0 és kisebb vagy egyenlő, mint 1. Ha szeretnénk megvizsgálni egy racionális törtfüggvény viselkedését nagy abszolút értékű számok esetében, akkor határértékszámítást kell alkalmaznunk. Mivel még nem rendelkezünk a szükséges ismeretekkel, ezért csak nagyon vázlatosan tudjuk összefoglalni a lehetséges eseteket. Tekintsük újra az

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}$$

racionális törtfüggvénynél alkalmazott jelölést!

- Ha  $n < m$ , azaz a számlálóban lévő polinom fokszáma kisebb, mint a nevezőé, akkor akár a pozitív, akár a negatív számok irányába nézünk egy idő után a függvény értéke egyre közelebb kerül a nullához. Ez azt jelenti, hogy a grafikon mindkét irányban egyre jobban megközelíti az  $x$  tengelyt, de nem éri el.



- Ha  $n = m$ , azaz a számlálóban és a nevezőben lévő polinom fokszáma megegyezik, akkor ugyanaz lesz a helyzet, mint az előző esetben azzal a különbséggel, hogy a grafikon nem az  $x$  tengelyt közelíti meg, hanem az

$$y = \frac{a_n}{b_n}$$

vízszintes egyenest.

- Ha  $n > m$ , azaz a számlálóban lévő polinom fokszáma nagyobb, mint a nevezőé, akkor egy idő után az értékek minden határon túl nőni vagy csökkenni kezdenek attól függően, hogy a két  $a_n$  és  $b_n$  főegyüttható előjele megegyezik vagy nem egyezik meg. Ha a negatív számok irányába nézünk, akkor az eredmény függ még a két polinom fokszámának paritásától is. Ha a főegyütthatók előjele és a fokszámok paritása megegyezik, vagy ha egyik sem egyezik meg, akkor egy idő után a függvény értékei minden határon túl nőnek, ahogy a változó abszolút értéke nő. A többi esetben a függvény értékei minden határon túl csökkennek, ahogy a változó abszolút értéke nő.

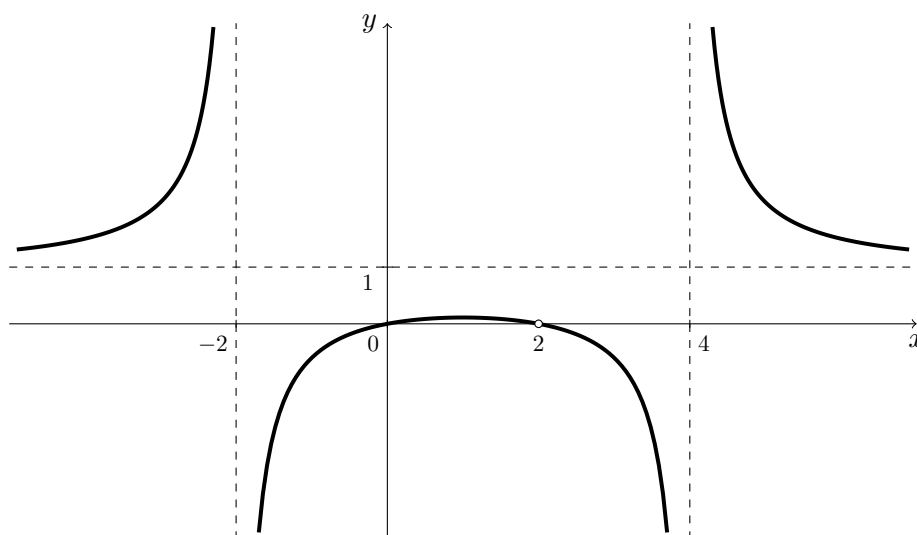
Lássunk egy példát! Tekintsük az

$$f(x) = \frac{x(x-2)^2}{(x-4)(x-2)(x+2)}$$

függvényt! Egyszerűsítés után azt kapjuk, hogy

$$f(x) = \frac{x(x-2)}{(x-4)(x+2)} \quad (x \neq 2).$$

Ekkor  $x = 0$  a függvény zérushelye, illetve  $x = -2$  és  $x = 4$  a függvény pólushelye. Az alábbi ábra mutatja a polinom grafikonját.



Szeretnénk még egyszer hangsúlyozni, hogy az előbbi módszerrel ábrázolt grafikon nem pontos, hiszen például nem tudjuk vele meghatározni a függvény szélsőérték-helyeit.

4.3. Az  $n$ -edik hatvány- és gyökfüggvény

Az

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) = x^n$$

módon megadott függvényt  **$n$ -edik hatványfüggvénynek** nevezzük, ahol  $n$  egy pozitív egész szám.

A hatványfüggvények speciális polinomok. Grafikonjukat meg kell különböztetni az  $n$  paritása szerint, hiszen a 7. Feladatban már igazoltuk, hogy ha  $n$  páros, akkor  $f$  páros függvény, ha  $n$  páratlan, akkor  $f$  páratlan függvény.

Ha  $n = 1$ , akkor az  $f(x) = x$  függvényt kapjuk, amelynek grafikonja egy az origón átmenő, az  $x$  tengellyel  $45^\circ$ -ot bezáró egyenes. Ha  $n = 2$ , akkor az  $f(x) = x^2$  függvényt kapjuk, amelynek grafikonja a jól ismert parabola. A kérdés tehát, hogy milyen lesz a függvény grafikonja  $n > 2$  esetén.

A paritás miatt elegendő lenne meghatározni a grafikont az  $x > 0$  számok esetén. Ehhez vegyük észre, hogy az  $n$ -edik hatványfüggvény az  $f(x) = x$  függvény  $n$ -szer egymás után önmagával vett szorzata. Így a 3. Feladat utáni megjegyzésből következik, hogy az  $n$ -edik hatványfüggvény szigorúan monoton növekvő a  $]0, \infty[$  intervallumon. Hasonlóan, az 5. Tétel utáni megjegyzésből következik, hogy az  $n$ -edik hatványfüggvény szigorúan konvex a  $]0, \infty[$  intervallumon, ha  $n \geq 2$ .

Negatív értékek esetén a fenti tulajdonságokból rögtön meg tudjuk állapítani a függvény-tulajdonságokat a függvény paritása alapján. Eszerint két esetet kell megkülönböztetni.

Ha  $n$  páros, akkor  $f$  páros függvény, ezért szigorúan monoton csökkenő lesz a  $] - \infty, 0[$  intervallumon, szigorúan monoton növekvő lesz a  $]0, \infty[$  intervallumon, és abszolút minimuma van az  $x_0 = 0$  pontnál. Továbbá a függvény konvex a valós számok halmazán.

Ha  $n$  páratlan, akkor  $f$  szigorúan monoton növekvő a valós számok halmazán. Ha  $n \geq 3$ , akkor  $f$  szigorúan konkáv a  $] - \infty, 0[$  intervallumon és szigorúan konvex a  $]0, \infty[$  intervallumon.

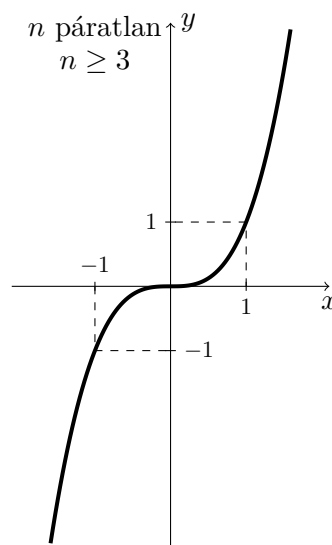
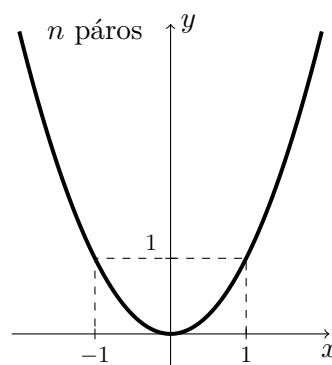
A következőkben összefoglaljuk a „Valós számok” című tananyagban tanult **hatványozás alaptulajdonságait**:

$$(a) x^{n+m} = x^n x^m, \quad (b) x^{n-m} = \frac{x^n}{x^m} \quad (x \neq 0),$$

$$(c) x^n y^n = (xy)^n, \quad (d) \frac{x^n}{y^n} = \left(\frac{x}{y}\right)^n \quad (y \neq 0),$$

$$(e) x^{nm} = (x^n)^m.$$

minden  $x, y \in \mathbf{R}$  és  $n, m \in \mathbf{N}$  esetén.



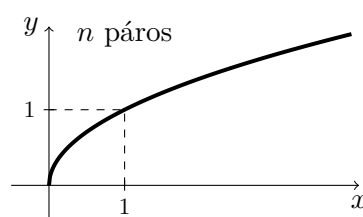
Azt láttuk tehát, hogy az  $n$ -edik hatványfüggvény szigorúan monoton növekvő a valós számok halmazán, ha  $n$  páratlan szám, és ezért invertálható függvény. Ha  $n$  páros szám, akkor már nem invertálható, de ha leszűkítjük a függvényt a nem negatív valós számokra, akkor már invertálható, mert ott szigorúan monoton növekvő. Az így értelmezett inverz függvényeket  **$n$ -edik gyökfüggvénynek** mondjuk. Nevezetesen, ha  $n$  páros szám, akkor

$$f: [0, \infty[ \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) = \sqrt[n]{x},$$

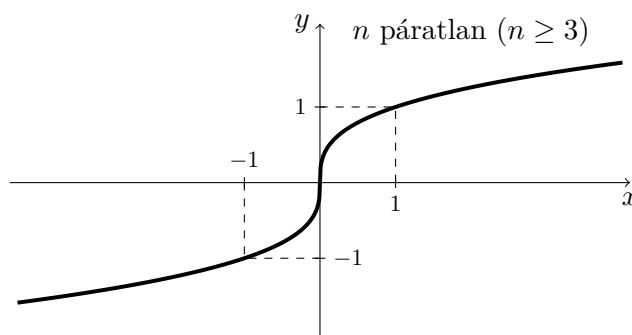
és ha  $n$  páratlan szám ( $n \geq 3$ ), akkor

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) = \sqrt[n]{x}.$$

Az első részben az inverz függvényekre igazolt 3., 4. és 6. Tétel alapján megkapjuk az  $n$ -edik gyökfüggvény grafikonját az  $n$ -edik hatványfüggvény inverzeként. Ezek szerint a gyökfüggvények szigorúan monoton növekvőek a teljes értelmezési tartományukban, illetve szigorúan konkáv a  $]0, \infty[$  intervallumon.



Továbbá, ha  $n$  páratlan, akkor az  $n$ -edik gyökfüggvény páratlan függvény, illetve szigorúan konvex a  $] - \infty, 0[$  intervallumon.



A következőkben összefoglaljuk a „Valós számok” című tananyagban tanult **gyökvonás alaptulajdonságait**:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad \sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \sqrt[n]{y}, & \text{(b)} \quad \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} \quad (y \neq 0), \\ \text{(c)} \quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[mn]{x}, & \text{(d)} \quad \sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m, \\ \text{(e)} \quad \sqrt[2n]{x^{2n}} = |x|, & \text{(d)} \quad \sqrt[2n+1]{x^{2n+1}} = x. \end{array}$$

minden olyan  $x, y \in \mathbf{R}$  és  $n, m \in \mathbf{N}$  esetén, ahol a fenti gyökök értelmezhetőek.

## 4.4. Az exponenciális és a logaritmus függvény

Először foglaljuk össze, hogyan értelmezzük egy szám  $x$ -edik hatványát!

- Ha  $a \in \mathbf{R}$  és  $x = n$  egy pozitív egész szám, akkor

$$a^1 := a \quad \text{és} \quad a^n := a \cdot a^{n-1} \quad (n > 1).$$

- Ha  $a \neq 0$  és  $x = 0$ , akkor  $a^0 := 1$ .
- Ha  $a \neq 0$  és  $x$  egy negatív egész szám, azaz  $x = -n$ , ahol  $n$  egy pozitív egész szám, akkor

$$a^{-n} := \frac{1}{a^n}.$$

- Ha  $a > 0$  és  $x$  egy racionális szám, azaz  $x = \frac{p}{q}$ , ahol  $p$  egész szám és  $q$  egy pozitív egész szám, akkor

$$a^{\frac{p}{q}} := \sqrt[q]{a^p}.$$

Hogyan értelmezzük egy pozitív szám  $x$ -edik hatványát, ha  $x$  egy irracionális szám? Mivel egyenlő például a  $2^\pi$  hatvány?

A kérdés megválaszolására alkalmazzuk a következő állítást, amelyet a „Valós számok” című tananyagban igazoltunk.

Ha  $r < s$  két racionális szám és  $a > 1$ , akkor  $a^r < a^s$ .

A fenti állítás szerint az  $a^x$  kifejezés szigorúan monoton növekvő a racionális számok halmazán, ha  $a > 1$ . Ebből következik, hogy minden  $x$  valós szám esetén az

$$A_x := \{a^r : r \leq x \text{ és } r \in \mathbf{Q}\}$$

halmaz felülről korlátos, hiszen bármely  $s > x$  racionális szám esetén az  $a^s$  szám a halmaznak felső korlátja. Ezért az  $A_x$  halmaznak létezik felső határa. A monotonitás miatt ez a felső határ megegyezik  $a^x$ -nel, ha  $x$  racionális szám. Terjesszük ki tehát ezt az értelmezést az összes  $x$  valós számra.

**13. Definíció.** Legyen  $x$  egy valós szám.

- Ha  $a > 1$ , akkor

$$a^x := \sup\{a^r : r \leq x \text{ és } r \in \mathbf{Q}\}.$$

- Ha  $0 < a < 1$ , akkor  $a^x := \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$ .
- Ha  $a = 1$ , akkor  $1^x := 1$ .

A  $0 < a < 1$  esetben adott értelmezés azért helyes, mert  $\frac{1}{a} > 1$ , és így visszavezethető az  $a > 1$  esetben adott értelmezéshez. A rövideg kedvéért a továbbiakban  $\frac{1}{a}$  helyett az  $a^{-1}$  jelölést fogjuk alkalmazni.

A monotonitás miatt az  $a^x := \sup\{a^r : r \leq x \text{ és } r \in \mathbf{Q}\}$  értelmezés leegyszerűsíthető az  $x$  irracionális számokra. Minden  $a > 1$  esetén, ha  $r_1, r_2, r_3, \dots$  megszámlálhatóan sok olyan racionális szám, amire

$$x = \sup\{r_1, r_2, r_3, \dots\} \quad \text{teljesül, akkor} \quad a^x = \sup\{a^{r_1}, a^{r_2}, a^{r_3}, \dots\}.$$

Valóban, ha  $y := \sup\{a^{r_1}, a^{r_2}, a^{r_3}, \dots\}$ , akkor  $y \leq a^x$ , hiszen az  $A_x$  halmaz tartalmazza az  $\{r_1, r_2, r_3, \dots\}$  halmazt, így szuprémuma nagyobb vagy egyenlő. Másrészt, tetszőleges  $r < x$  racionális szám esetén van olyan  $r_i$  racionális szám, hogy  $r < r_i$ , hiszen  $x$  az  $r_1, r_2, r_3, \dots$  számok szuprémuma. Ekkor  $a^r < a^{r_i}$ , amiből következik, hogy  $a^x \leq y$ . Mindent együttevén  $y = a^x$  teljesül.

A fenti leegyszerűsítés miatt igaz, hogy

$$2^\pi = \sup\{2^3, \sqrt[10]{2^{31}}, \sqrt[100]{2^{314}}, \sqrt[1000]{2^{3141}}, \dots\},$$

hiszen  $\pi = \sup\{3; 3, 1; 3, 14; 3, 141; \dots\}$ . Mivel

$$8,821 \approx \sqrt[1000]{2^{3141}} < 2^\pi < \sqrt[1000]{2^{3142}} \approx 8,827,$$

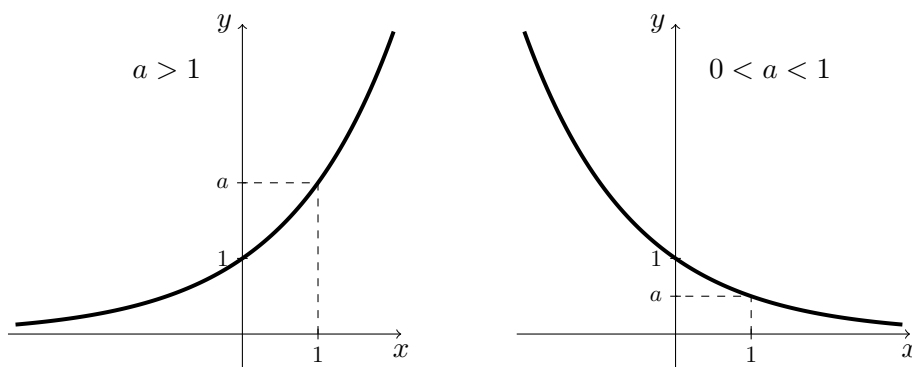
ezért  $2^\pi$  közelítő értéke 8,82.

Az irracionális kitevős hatványozás értelmezése után már megadható az exponenciális függvény fogalma. Az

$$f: \mathbf{R} \rightarrow ]0, \infty[, \quad f(x) = a^x$$

függvényt, ahol  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  egy valós szám,  **$a$  alapú exponenciális függvénynek** nevezzük. Igazolható, hogy az exponenciális függvény értékkészlete éppen a pozitív valós számok halmaza.

Az exponenciális függvény grafikonja egy a teljes valós számok halmazán értelmezett folytonos görbevonal. A grafikont meg kell különböztetni  $a > 1$  és  $0 < a < 1$  esetén. A következő ábrák mutatják az exponenciális függvény grafikonját mindkét esetben.



Legyen  $a > 1$  és  $x < y$  két valós szám. Vegyünk két olyan  $r_1$  és  $r_2$  racionális számot, amire  $x < r_1 < r_2 < y$  teljesül. Mivel  $a^{r_1}$  és  $a^{r_2}$  felső korlátja az  $A_x$  halmaznak, és mindkettő eleme az  $A_y$  halmaznak, így

$$a^x = \sup A_x \leq a^{r_1} < a^{r_2} \leq \sup A_y = a^y$$

teljesül. Ez azt jelenti, hogy az exponenciális függvény szigorúan monoton növekvő a valós számok halmazán, ha  $a > 1$ . Ha  $0 < a < 1$ , akkor az  $a^x = (a^{-1})^{-x}$  értelmezésből rögtön látjuk, hogy az exponenciális függvény szigorúan monoton csökkenő a valós számok halmazán. Mindkét esetben, ha  $0 < a < 1$ , vagy ha  $a > 1$ , igazolni fogjuk, hogy az exponenciális függvény konvex a teljes valós számok halmazán. Ehhez először nézzük meg az exponenciális függvény **alaptulajdonságait**.

Minden  $a, b > 0$  és  $x, y \in \mathbf{R}$  esetén igaz, hogy

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad a^x a^y &= a^{x+y}, & \text{(b)} \quad \frac{a^x}{a^y} &= a^{x-y}, \\ \text{(c)} \quad (a^x)^y &= a^{xy}, & \text{(e)} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^x &= \frac{a^x}{b^x}. \\ \text{(d)} \quad (ab)^x &= a^x b^x, \end{aligned}$$

A „Valós számok” című tananyagban igazoltuk az előző alaptulajdonságokat, ha  $x$  és  $y$  racionális számok. Megmutatjuk, hogyan tudjuk az alaptulajdonságokat kiterjeszteni az összes valós számra, de csak az a) tulajdonság esetében. A többi igazolását az olvasóra bízunk (lásd a 45. Feladatot).

**9. Feladat.** Legyen  $x, y \in \mathbf{R}$  és  $a > 0$ . Igazoljuk, hogy  $a^{x+y} = a^x a^y$ .

*Megoldás:* Az állítást már igazoltuk a „Valós számok” című tananyagban, ha  $x$  és  $y$  racionális számok, illetve az  $a = 1$  eset nyilvánvaló, mert  $1^x = 1$  minden  $x \in \mathbf{R}$  esetén.

Tegyük fel, hogy  $a > 1$ . Legyen  $r < x + y$  egy racionális szám. Mivel két szám között találunk racionális számot, így van olyan  $r_1 \in \mathbf{Q}$ , hogy

$$x - \frac{x + y - r}{2} \leq r_1 \leq x.$$

Jelölje még  $r_2 := r - r_1$ . Egyszerű számításokkal nem nehéz igazolni, hogy  $r_1$  és  $r_2$  két olyan racionális szám, amire

$$r_1 \leq x, \quad r_2 < y, \quad \text{és} \quad r_1 + r_2 = r$$

teljesül. Ekkor az exponenciális függvény monotonitása miatt

$$a^r = a^{r_1+r_2} = a^{r_1} a^{r_2} < a^x a^y$$

teljesül. Ezek szerint  $a^x a^y$  felső korlátja az  $\{a^r : r \leq x + y \text{ és } r \in \mathbf{Q}\}$  halmaznak, vagyis nagyobb vagy egyenlő, mint a felső határa, ami a definíció szerint éppen  $a^{x+y}$ . Eszerint  $a^{x+y} \leq a^x a^y$ .

Másrészt legyen  $r \leq x$  és  $s \leq y$  két racionális szám. Ekkor  $r + s \leq x + y$ , és így az exponenciális függvény monotonitása miatt

$$a^r a^s = a^{r+s} \leq a^{x+y}.$$

Ezért minden  $s \leq y$  esetén

$$\frac{a^{x+y}}{a^s} \geq a^r \quad (r \leq x) \quad \implies \quad \frac{a^{x+y}}{a^s} \geq \sup\{a^r : r \leq x \text{ és } r \in \mathbf{Q}\} = a^x.$$

Ebből hasonlóan

$$\frac{a^{x+y}}{a^x} \geq a^s \quad (s \leq y) \quad \implies \quad \frac{a^{x+y}}{a^x} \geq \sup\{a^s : s \leq y \text{ és } s \in \mathbf{Q}\} = a^y.$$

Tehát  $a^x a^y \leq a^{x+y}$ . Ezért mindent együttvéve azt kapjuk, hogy  $a^{x+y} = a^x a^y$ .

A  $0 < a < 1$  esetet az előző esetből kapjuk meg. Valóban,  $a^{-1} > 1$ , és így

$$a^x a^y = (a^{-1})^{-x} (a^{-1})^{-y} = (a^{-1})^{-x-y} = (a^{-1})^{-(x+y)} = a^{x+y}$$

teljesül.

Az előző feladatban igazolt tulajdonság alkalmazható az exponenciális függvény konvexitásának igazolására. Induljunk ki a jól ismert számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenségből, ami azt állítja, hogy ha  $x$  és  $y$  két különböző pozitív szám, akkor

$$\sqrt{xy} < \frac{x+y}{2}.$$

A számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenség általános alakjával a 6. Részben fogunk foglalkozni. Legyen most  $x$  és  $y$  két különböző valós szám és  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ . Az exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt  $a^x \neq a^y$ , ezért a 9. Feladatban igazolt tulajdonság és a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenség szerint

$$a^{\frac{x+y}{2}} = \sqrt{a^x a^y} < \frac{a^x + a^y}{2}.$$

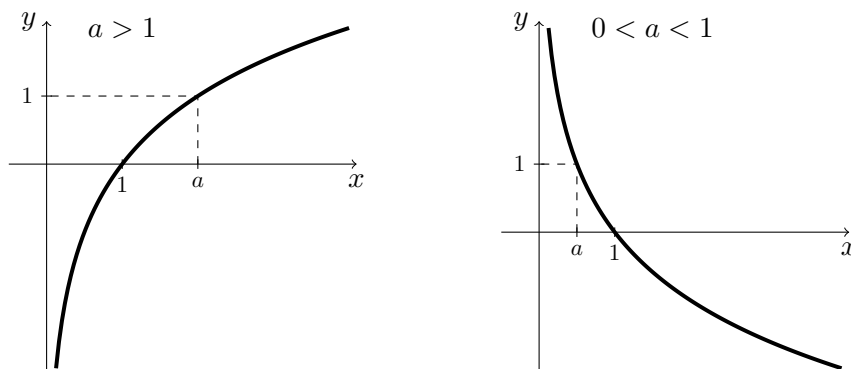
Ebből következik, hogy az exponenciális függvény szigorúan gyengén konvex. Mivel a függvény szigorúan monoton növekvő, így a 9. Tétel szerint az exponenciális függvény szigorúan konvex.

Az exponenciális függvény szigorú monotonitásából következik, hogy invertálható függvény a teljes valós számok halmazán. Az  $a$  alapú exponenciális függvény inverzét  **$a$  alapú logaritmus függvénynek** nevezzük és

$$f^{-1}(x) = \log_a x$$

módon jelöljük. A logaritmus függvény értelmezési tartománya az exponenciális függvény értékészlete, azaz a pozitív valós számok halmaza.

Az exponenciális függvényhez hasonlóan a logaritmus függvény grafikonja egy a pozitív valós számok halmazán értelmezett folytonos görbevonallal. A grafikont ugyanúgy megkülönböztetjük  $a > 1$  és  $0 < a < 1$  esetén. A következő ábrák mutatják a logaritmus függvény grafikonját mindkét esetben.



Az inverz függvény monotonitásáról szóló 3. Tételből következik, hogy az  $a$  alapú logaritmus függvény ugyanolyan monotonitású, mint az  $a$  alapú exponenciális függvény. Ezért  $a > 1$  esetén szigorúan monoton növekvő, míg  $0 < a < 1$  esetén szigorúan monoton csökkenő függvény.

Más a helyzet a konvexitással. Az inverz függvény konvexitásáról szóló 6. Tétel szerint a függvény monotonitásának típusa befolyásolja a konvexitás típusát. Az exponenciális függvény konvex függvény. Ha  $a > 1$ , akkor az exponenciális függvény szigorúan monoton növekvő, és ezért a logaritmus függvény konkáv. Ha  $0 < a < 1$ , akkor az exponenciális függvény szigorúan monoton csökkenő, és ezért a logaritmus függvény konvex.

A logaritmus függvény **alaptulajdonságai** a következők: minden  $x, y \in \mathbf{R}^+$ , illetve  $b \in \mathbf{R}$ ,  $a, c > 0$  és  $a, c \neq 1$  esetén igaz, hogy

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \log_a xy &= \log_a x + \log_a y, & \text{(b)} \quad \log_a \frac{x}{y} &= \log_a x - \log_a y, \\ \text{(c)} \quad a^{\log_a x} &= x, & \text{(d)} \quad \log_a x^b &= b \log_a x, \\ \text{(e)} \quad \log_a x &= \frac{\log_c x}{\log_c a}, & \text{(f)} \quad \log_a c \log_c a &= 1. \end{aligned}$$

A (c) tulajdonság az exponenciális és a logaritmus függvény inverz-kapcsolatából következik. A többi tulajdonság igazolása az exponenciális függvény tulajdonságainak és szigorú monotonitásának alkalmazásával történik. Például az (e) tulajdonságot úgy igazoljuk, hogy

$$c^{\log_a x \log_c a} = \left(c^{\log_c a}\right)^{\log_a x} = a^{\log_a x} = x = c^{\log_c x}.$$

Így  $\log_a x \log_c a = \log_c x$ , amiből az (e) tulajdonság következik. A többi tulajdonság igazolását az olvasóra bízunk (lásd a 46. Feladatot).



## 4.5. Trigonometrikus függvények

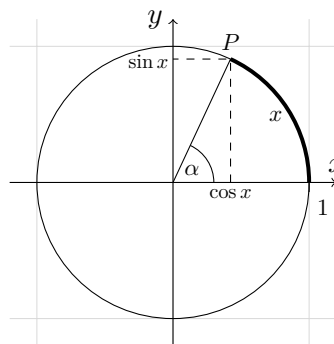
Az itt tárgyalásra kerülő trigonometrikus függvények megadása geometriai eredetű. A középiskolában tanult koordinátageometriai ismeretek elengedhetetlen a tananyag megértéséhez. Mindenek előtt a szög mérésével kapcsolatos fogalmakról ejtünk néhány szót.

A szöveget egy olyan körív hosszával mérjük, amelynek középpontja a szög csúcsa. Szögméréshez két mértékegység használatos, a fok és a radián. Ha a kör kerületét felosztjuk 360 egyenlő részre, akkor egy részhez tartozó ív jelöli ki az egységnyi nagyságú,  $1^\circ$ -os szöveget. 1 radián nagyságú az a szög, amelyet a méréshez felhasznált kör sugarával egyenlő nagyságú ív mér. Ha egy szög  $\alpha$  fokban és ugyanakkor  $x$  radián, akkor fennáll a

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{\pi}{180^\circ}$$

összefüggés.

Tekintsük az origó középpontú 1 sugarú kört. Ekkor a kör kerülete  $2\pi$ . Legyen  $x \in [0, 2\pi[$ . Jelölje  $P$  a kör kerületének azon pontját, ahol az  $(1, 0)$  koordinátájú ponttól az óra járásával ellentétes irányban  $P$ -ig határolt kerületi ív hossza éppen  $x$  ( $x$  radián szög). Ekkor úgy értelmezzük  $x$  **koszinuszát** és **szinusztát**, mint a  $P$  pont első és második koordinátájának értéke. Ezeket  $\cos x$  és  $\sin x$  módon jelöljük.



A fenti megfeleltetések a szög radiánban mért  $[0, 2\pi[$ -beli értékéhez hozzárendelnek egy  $[-1, 1]$ -beli számot. A gyakorlatban, például a trigonometriában, szokták a szinuszt és a koszinuszt fokban mért szögekre is alkalmazni. Azonban csak akkor tekinthetjük őket valós függvényeknek, ha kizárólag a radián szögmértéket használjuk.

A szinusz és a koszinusz értelmezéséből rögtön megkapjuk a táblázatban szereplő értékeket. Továbbá

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad (7)$$

minden  $x \in [0, 2\pi[$ , hiszen az értelmezésben szereplő  $P$  pont koordinátái kielégítik az origó középpontú 1 sugarú kör egyenletét.

Három olyan további szög van, amelyek nevezetesek azért, mert geometriai úton nem nehéz kiszámítani a hozzájuk tartozó szinusz és koszinusz értékét.

$x$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin x$	0	1	0	-1
$\cos x$	1	0	-1	0

Az egyik a  $45^\circ$  szöghöz tartozó  $x = \frac{\pi}{4}$ , hiszen az ábrán látható  $OKP$  derékszögű háromszög egyenlő szárú. Ezért a  $P$  pont mindkét koordinátája megegyezik, és így (7) alapján következik, hogy

$$\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ha a  $30^\circ$  szöghöz tartozó  $x = \frac{\pi}{6}$  értéket nézzük, akkor az  $OKP$  derékszögű háromszöghöz tartozó Thalész-kör középpontja az 1 hosszúságú  $OP$  átfogó  $F$  felezőpontja. Így  $FKP$  olyan egyenlő szárú háromszög, amelynek egy szöge  $60^\circ$ . Ebből következik, hogy  $FKP$  egy szabályos háromszög, amelynek minden oldala  $\frac{1}{2}$  hosszúságú. Tehát a  $P$  pont második koordinátája  $\frac{1}{2}$ , és így (7) miatt az első koordinátája  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ . Ezért

$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{és} \quad \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

Az előzőhöz hasonlóan a  $60^\circ$  szöghöz tartozó  $x = \frac{\pi}{3}$  érték esetén azt kapjuk, hogy

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \quad \text{és} \quad \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

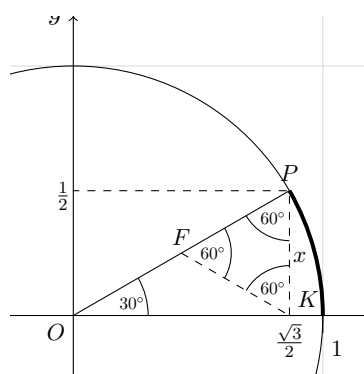
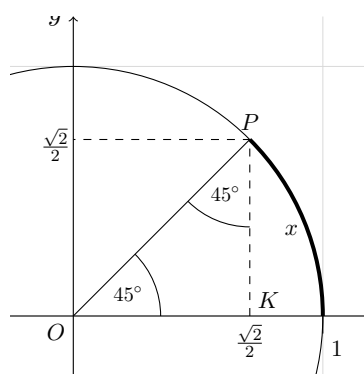
A táblázat összefoglalja az előző nevezetes szögekhez tartozó szinusz és koszinusz értékeket.

$x$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\sin x$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

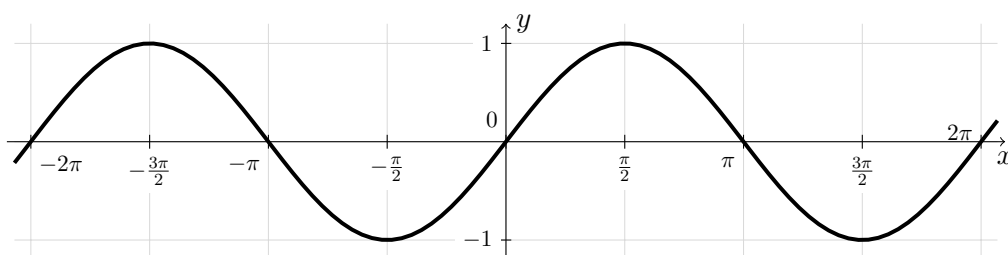
Azt a függvényt, amely  $2\pi$  periódussal kiterjeszti a  $[0, 2\pi[$ -beli szinusz értékeket az egész valós számokra, **szinusz függvénynek** nevezzük és ugyanígy  $\sin x$  módon jelöljük. Hasonlóan értelmezzük a **koszinusz függvényt** is. Tehát

$$\sin: \mathbf{R} \rightarrow [-1, 1] \quad \text{és} \quad \cos: \mathbf{R} \rightarrow [-1, 1]$$

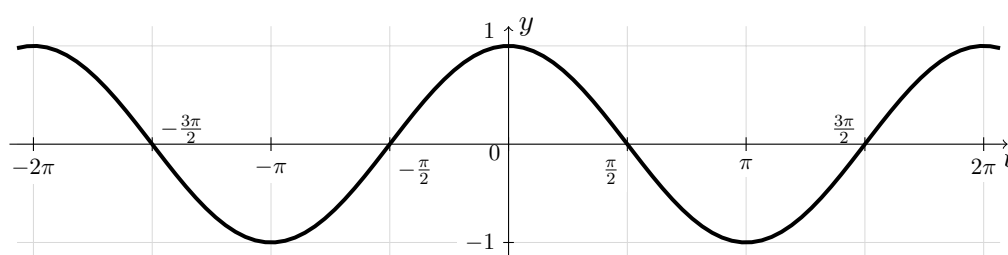
$2\pi$  szerint periodikus függvények.



A következő ábra mutatja a szinusz függvény grafikonját.



A koszinusz függvény grafikonja pedig a következő.



A periodicitás figyelembevételével nem nehéz megadni a függvények **zérushelyeit**:

$$\cos x = 0 \quad \iff \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

$$\sin x = 0 \quad \iff \quad x = k\pi$$

minden  $k \in \mathbf{Z}$  esetén, melynek segítségével **előjel vizsgálatot** hajthatunk végre:

$$\cos x > 0 \quad \iff \quad -\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

$$\cos x < 0 \quad \iff \quad \frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,$$

$$\sin x > 0 \quad \iff \quad 2k\pi < x < \pi + 2k\pi,$$

$$\sin x < 0 \quad \iff \quad -\pi + 2k\pi < x < 2k\pi$$

minden  $k \in \mathbf{Z}$  esetén.

A periodicitás miatt szintén nyilvánvaló, hogy (7) kiterjeszthető a teljes valós számok halmazára, azaz

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad (x \in \mathbf{R}). \quad (8)$$

A következő összefüggések szintén nagyon fontos szerepet játszanak a trigonometrikus kifejezések kezelésében.

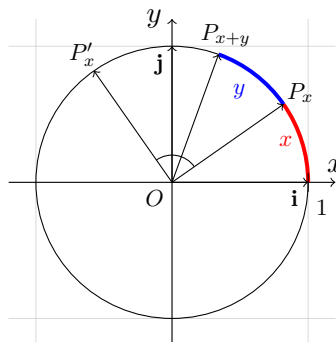
**10. Tétel (Addíciós tétel).** Minden  $x, y \in \mathbf{R}$  esetén

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y.$$

*Bizonyítás.*

Legyenek  $\mathbf{i}$  és  $\mathbf{j}$  a  $(0, 1)$  és  $(1, 0)$  pontokba mutató egységvektorok.  $P_x$  és  $P_{x+y}$  az egységkör kerületének azon pontjai, ahol az  $(1, 0)$  koordinátájú ponttól az óra járásával ellentétes irányban a pontig határolt kerületi ív hossza éppen  $x$  és  $x + y$ . Ha  $x$  vagy  $x + y$  nem eleme a  $[0, 2\pi[$  intervallumnak, akkor a megfelelő egész számú  $2\pi$  hozzáadásával a mértéküket azzá tudjuk tenni. Továbbá legyen  $P'_x$  az egységkör kerületének azon pontja, amelyre az  $\overrightarrow{OP'_x}$  vektor az  $\overrightarrow{OP_x}$  vektor  $90^\circ$ -os, az óra járásával ellentétes irányú elforgatása.



Egy pont koordinátái azt jelölik, hogyan írható fel a pont helyvektora az  $\mathbf{i}$  és  $\mathbf{j}$  vektorok segítségével. Ezért a  $P'_x$  pont értelmezése miatt

$$\overrightarrow{OP'_x} = \cos x \mathbf{i} + \sin x \mathbf{j},$$

$$\overrightarrow{OP_x} = -\sin x \mathbf{i} + \cos x \mathbf{j}.$$

A  $P_x P_{x+y}$  ívhez tartozó középponti szög  $y$  radián, így az  $\overrightarrow{OP_x}$  és  $\overrightarrow{OP_{x+y}}$  vektorok által létrehozott új koordináta-rendszerben

$$\overrightarrow{OP_{x+y}} = \cos y \overrightarrow{OP_x} + \sin y \overrightarrow{OP'_x}.$$

Az első két egyenletnek a harmadikba való helyettesítésével az

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP_{x+y}} &= \cos y (\cos x \mathbf{i} + \sin x \mathbf{j}) + \sin y (-\sin x \mathbf{i} + \cos x \mathbf{j}) \\ &= (\cos x \cos y - \sin x \sin y) \mathbf{i} + (\sin x \cos y + \cos x \sin y) \mathbf{j} \end{aligned}$$

előállítást kapjuk. Mivel

$$\overrightarrow{OP_{x+y}} = \cos(x + y) \mathbf{i} + \sin(x + y) \mathbf{j}$$

az  $\overrightarrow{OP_{x+y}}$  vektor egy másik előállítása, így a megfelelő komponensek egyenlők, amiből a tétel állítása következik.

Az addíciós tételnek van egy másik alakja, amely a szögek különbségére vonatkozik.

**11. Tétel.** Minden  $x, y \in \mathbf{R}$  esetén

$$\begin{aligned}\cos(x - y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y, \\ \sin(x - y) &= \sin x \cos y - \cos x \sin y.\end{aligned}$$

*Bizonyítás.* Az addíciós tételből azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\cos x &= \cos((x - y) + y) = \cos(x - y) \cos y - \sin(x - y) \sin y, \\ \sin x &= \sin((x - y) + y) = \sin(x - y) \cos y + \cos(x - y) \sin y.\end{aligned}$$

Ha az első egyenletet megszorozzuk  $\cos y$ -nal, a másodikat  $\sin y$ -nal és összeadjuk, akkor azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\cos x \cos y + \sin x \sin y &= \cos(x - y) \cos^2 y - \sin(x - y) \sin y \cos y + \\ &\quad + \sin(x - y) \sin y \cos y + \cos(x - y) \sin^2 y = \\ &= \cos(x - y)(\cos^2 y + \sin^2 y) = \cos(x - y).\end{aligned}$$

A második azonosság hasonlóan igazolható. Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

Az addíciós tételből szinte minden trigonometrikus függvényekkel kapcsolatos tulajdonság igazolható. Rögtön megállapítható vele a szinusz és koszinusz függvények **paritása**. Valóban, mivel  $\cos 0 = 1$  és  $\sin 0 = 0$ , így

$$\cos(-x) = \cos(0 - x) = \underbrace{\cos 0}_{=1} \cos x + \underbrace{\sin 0}_{=0} \sin x = \cos x,$$

és

$$\sin(-x) = \sin(0 - x) = \underbrace{\sin 0}_{=0} \cos x - \underbrace{\cos 0}_{=1} \sin x = -\sin x.$$

Ezért a koszinusz függvény páros, a szinusz függvény pedig páratlan függvény. Ez a tulajdonság a függvények grafikonjából azonnal látható.

Szintén látható, hogy az egyik grafikonból megkapjuk a másikat egy  $x$  tengely irányú eltolással. Ez a

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \quad \text{és} \quad \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

azonosságokból következnek, amelyeket az addíciós tétel alapján nem nehéz igazolni. Valóban, mivel  $\cos \frac{\pi}{2} = 0$  és  $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ , így minden  $x \in \mathbf{R}$  esetén

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \underbrace{\cos \frac{\pi}{2}}_{=0} \cos x + \underbrace{\sin \frac{\pi}{2}}_{=1} \sin x = \sin x,$$

és

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \underbrace{\sin \frac{\pi}{2}}_{=1} \cos x - \underbrace{\cos \frac{\pi}{2}}_{=0} \sin x = \cos x.$$

**10. Feladat.** *Igazoljuk a következő azonosságokat minden  $x$  valós szám esetén!*

$$\begin{aligned}\cos(\pi - x) &= -\cos x, & \sin(\pi - x) &= \sin x, \\ \cos(\pi + x) &= -\cos x, & \sin(\pi + x) &= -\sin x, \\ \cos(2\pi - x) &= \cos x, & \sin(2\pi - x) &= -\sin x.\end{aligned}$$

*Megoldás:* Az azonosságok az addíciós tétel közvetlen alkalmazásával igazolhatók, hiszen  $\cos \pi = -1$ ,  $\sin \pi = 0$ ,  $\cos 2\pi = 1$  és  $\sin 2\pi = 0$ . Az első azonosság igazolása a

$$\cos(\pi - x) = \underbrace{\cos \pi}_{=-1} \cos x + \underbrace{\sin \pi}_{=0} \sin x = -\cos x$$

módon történik. A többi azonosság hasonlóan igazolható.

Az eddig tanult azonosságok segítségével minden érték szinusztát és koszinusztát megkapjuk egy  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ -beli érték szinusztából vagy koszinusztából. Például,

$$\begin{aligned}\sin\left(-\frac{16\pi}{3}\right) &= -\sin\frac{16\pi}{3} = -\sin\left(4\pi + \frac{4\pi}{3}\right) = -\sin\frac{4\pi}{3} = \\ &= -\sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

Az addíciós tétel másik alkalmazása, hogy ki tudjuk fejezni vele egy érték többszörösének szinusztát és koszinusztát az érték szinusztából és koszinusztából. Például a jól ismert

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \quad \text{és} \quad \sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

azonosságok a következő módon igazolhatók:

$$\cos 2x = \cos(x + x) = \cos x \cos x - \sin x \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

és

$$\sin 2x = \sin(x + x) = \sin x \cos x + \cos x \sin x = 2 \sin x \cos x.$$

**11. Feladat.** *Írjuk fel  $\sin 3x$ -et és  $\cos 4x$ -et a  $\sin x$  és  $\cos x$  értékek függvényében!*

*Megoldás:* Az addíciós tétel segítségével felírjuk a keresett  $x$  érték többszörösének szinusztát vagy koszinusztát az  $x$  kisebb többszörösének szinusztából vagy koszinusztából. Ezt megismételjük amíg a képletben kizárólag  $\sin x$  és  $\cos x$  nem marad. A végeredmény különböző alakban adható meg.

Ilyen módon

$$\begin{aligned}\sin 3x &= \sin(2x + x) = \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x = \\ &= 2 \sin x \cos x \cos x + (\cos^2 x - \sin^2 x) \sin x = \\ &= 3 \sin x \cos^2 x - \sin^3 x = 3 \sin x(1 - \sin^2 x) - \sin^3 x = \\ &= 3 \sin x - 4 \sin^3 x,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 4x &= \cos(2x + 2x) = \cos 2x \cos 2x - \sin 2x \sin 2x = \\ &= (\cos^2 x - \sin^2 x)^2 - (2 \sin x \cos x)^2 = \\ &= \cos^4 x - 6 \sin^2 x \cos^2 x + \sin^4 x = \\ &= \cos^4 x - 6(1 - \cos^2 x) \cos^2 x + (1 - \cos^2 x)^2 = \\ &= 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1.\end{aligned}$$

Egy érték felének szinuszát vagy koszinuszát is fel tudjuk írni az érték szinuszából vagy koszinuszából. Induljunk ki a következő azonosságokból.

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad \text{és} \quad \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x.$$

A fenti két azonosság összegéből és különbségéből a

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \quad \text{és} \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2},$$

azonosságok adódnak. Ha ezekben  $x$  helyett  $\frac{x}{2}$ -t írunk és gyököt vonunk, akkor

$$\left| \cos \frac{x}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} \quad \text{és} \quad \left| \sin \frac{x}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$

teljesül. Az abszolút érték elhagyásához meg kell vizsgálni, hogy  $\cos \frac{x}{2}$  és  $\sin \frac{x}{2}$  milyen előjelű, ami függ attól, hogy  $\frac{x}{2}$  milyen intervallumba esik. Például tudjuk, hogy  $\cos \frac{\pi}{12}$  értéke pozitív, hiszen  $0 < \frac{\pi}{12} < \frac{\pi}{2}$ . Ezért

$$\cos \frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{6}}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}}.$$

A következő azonosságok megmutatják, hogyan tudjuk két szinusz vagy koszinusz összegét vagy különbségét szorzattá alakítani.

**12. Feladat.** *Igazoljuk a következő azonosságokat minden  $x$  valós szám esetén!*

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \left( \frac{x+y}{2} \right) \cos \left( \frac{x-y}{2} \right),$$

$$\sin x - \sin y = 2 \sin \left( \frac{x-y}{2} \right) \cos \left( \frac{x+y}{2} \right),$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \left( \frac{x+y}{2} \right) \cos \left( \frac{x-y}{2} \right),$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \left( \frac{x+y}{2} \right) \sin \left( \frac{x-y}{2} \right).$$

*Megoldás:* Legyen  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ . Az addíciós tételből egyszerű átalakításokkal a következő azonosságokat kapjuk

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta,$$

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \sin \beta,$$

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta,$$

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin \alpha \sin \beta.$$

Ekkor az azonosságok az  $\alpha = \frac{x+y}{2}$  és  $\beta = \frac{x-y}{2}$  megválasztása mellett következnek.

Az előző feladatban szereplő azonosságok nagyon hasznosak trigonometrikus egyenletek vagy egyenlőtlenségek megoldásában. Rögtön megmutatjuk, hogyan alkalmazhatók a szinusz és koszinusz függvények monotonitásának és konvexitásának vizsgálatában.

Legyen  $0 \leq y < x \leq \frac{\pi}{2}$ . Ekkor

$$0 < \frac{x-y}{2} < \frac{\pi}{2} \quad \text{és} \quad 0 < \frac{x+y}{2} < \frac{\pi}{2},$$

amiből következik, hogy

$$\sin \left( \frac{x-y}{2} \right) > 0, \quad \sin \left( \frac{x+y}{2} \right) > 0, \quad \cos \left( \frac{x+y}{2} \right) > 0.$$

Így

$$\sin x - \sin y = 2 \sin \left( \frac{x-y}{2} \right) \cos \left( \frac{x+y}{2} \right) > 0$$

és

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \left( \frac{x+y}{2} \right) \sin \left( \frac{x-y}{2} \right) < 0.$$



Ebből következik, hogy a szinusz függvény szigorúan monoton növekvő és a koszinusz függvény szigorúan monoton csökkenő a  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  intervallumon. Ekkor a periodicitás, illetve a 10. és a 4. Feladatban szereplő állítások segítségével meg tudjuk vizsgálni a szinusz és a koszinusz függvények monotonitását a teljes valós számok halmazán.

A szinusz függvény

- szigorúan monoton növekvő a  $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$  és
- szigorúan monoton csökkenő a  $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]$

intervallumokon minden  $k \in \mathbf{Z}$  esetén. Az

- $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$  pontoknál helyi maximuma van (itt  $\sin x = 1$ ),
- $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$  pontoknál helyi minimuma van (itt  $\sin x = -1$ )

minden  $k \in \mathbf{Z}$  esetén.

A koszinusz függvény

- szigorúan monoton növekvő a  $[-\pi + 2k\pi, 2k\pi]$  és
- szigorúan monoton csökkenő a  $[2k\pi, \pi + 2k\pi]$

intervallumokon minden  $k \in \mathbf{Z}$  esetén. Az

- $x = 2k\pi$  pontoknál helyi maximuma van (itt  $\cos x = 1$ ),
- $x = \pi + 2k\pi$  pontoknál helyi minimuma van (itt  $\cos x = -1$ )

minden  $k \in \mathbf{Z}$  esetén.

A konvexitás vizsgálatához vegyük észre, hogy

$$\sin x + \sin y = 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) < 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) < 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

ha  $0 < y < x < \frac{\pi}{2}$ , hiszen ekkor

$$0 < \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) < 1.$$

Ebből következik, hogy a szinusz és koszinusz függvény szigorúan gyengén konkáv a  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  intervallumon. Mivel mindkét függvény szigorúan monoton, így a 9. Tétel szerint a szinusz és koszinusz függvény szigorúan konkáv. A periodicitás, illetve a 10. Feladatban és a 7. Tételben szereplő állítások segítségével meg tudjuk adni a szinusz és a koszinusz függvények konvexitási intervallumait.

A szinusz függvény

- szigorúan konvex a  $]-\pi + 2k\pi, 2k\pi[$  és
- szigorúan konkáv a  $]2k\pi, \pi + 2k\pi[$

intervallumokon minden  $k \in \mathbf{Z}$  esetén.

A koszinusz függvény

- szigorúan konvex a  $\left] \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right[$  és
- szigorúan konkáv a  $\left] -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right[$

intervallumokon minden  $k \in \mathbf{Z}$  esetén.

A szinusz és koszinusz függvény részletes tárgyalása után bevezetjük a **tangens függvényt**, mint a szinusz és a koszinusz függvény hányadosát, illetve a **kotangens függvényt**, mint a koszinusz és a szinusz függvény hányadosát. Nevezetesen

$$\operatorname{tg} x := \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{és} \quad \operatorname{ctg} x := \frac{\cos x}{\sin x}.$$

A tangens függvény nincs értelmezve azokon a helyeken, ahol  $\cos x = 0$  és a kotangens ott, ahol  $\sin x = 0$ . Ezért

$$\operatorname{tg}: \mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbf{Z} \right\} \rightarrow \mathbf{R} \quad \text{és} \quad \operatorname{ctg}: \mathbf{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbf{Z}\} \rightarrow \mathbf{R}.$$

Továbbá a 10. Feladatban szereplő azonosságok alapján

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(x + \pi) &= \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \operatorname{tg} x, \\ \operatorname{tg}(-x) &= \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x \end{aligned}$$

és hasonlóan igazolható, hogy  $\operatorname{ctg}(x + \pi) = \operatorname{ctg} x$ ,  $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$ . Ezért a tangens és kotangens függvények  $\pi$  szerint periodikus páratlan függvények.

A függvények zérushelyei a következők:

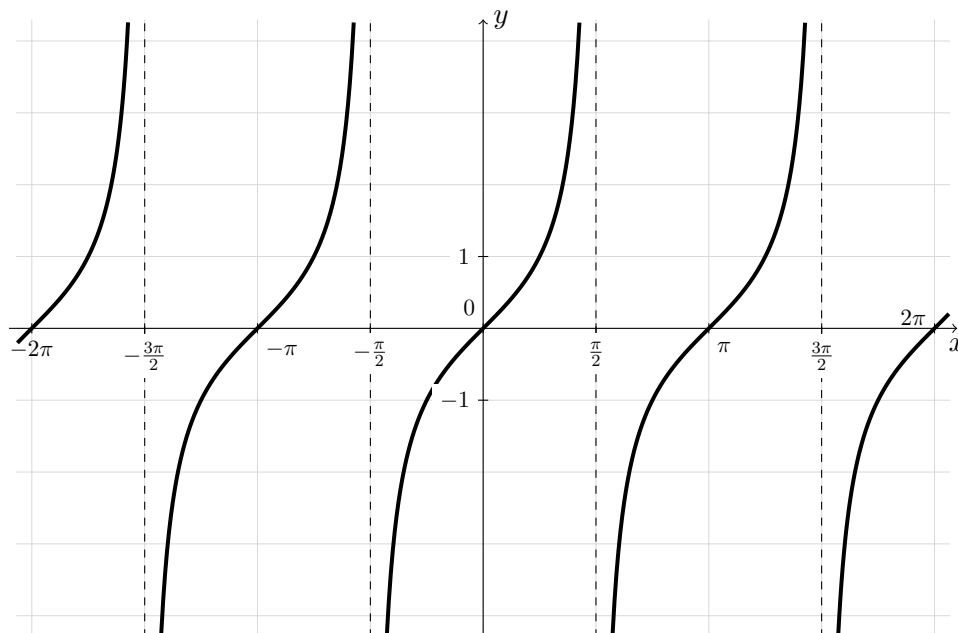
$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x = 0 &\iff \sin x = 0 &\iff x = k\pi, \\ \operatorname{ctg} x = 0 &\iff \cos x = 0 &\iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{aligned}$$

minden  $k \in \mathbf{Z}$  esetén.

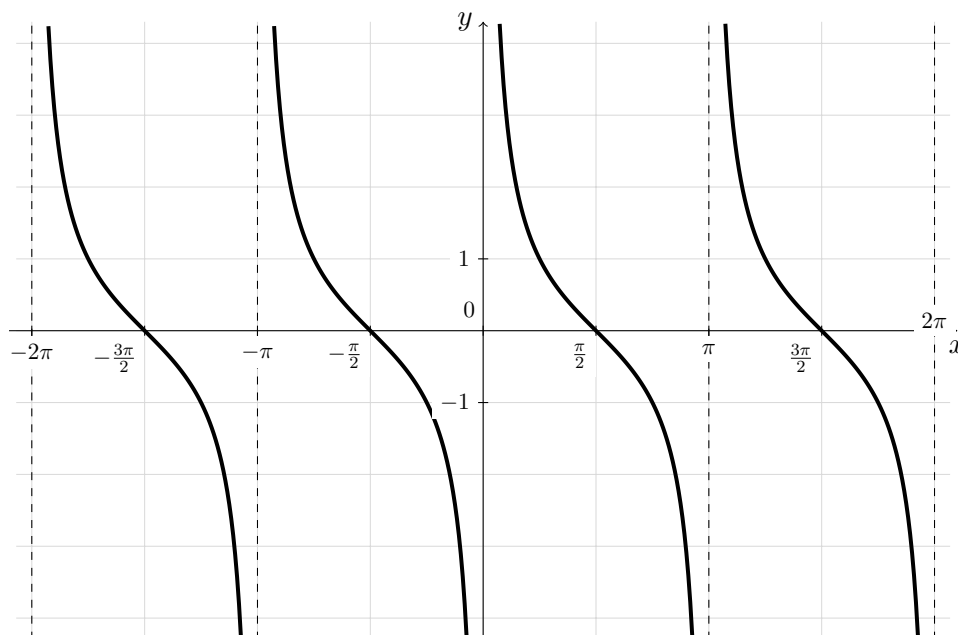
A szinusz és koszinusz nevezetes értékeiből rögtön megkapjuk a tangens és kotangens függvények nevezetes értékeit.

$x$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	0	–	0	–
$\operatorname{ctg} x$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	–	0	–	0

A következő ábra mutatja a tangens függvény grafikonját.



A kotangens függvény grafikonja pedig a következő.



Vizsgáljuk meg a tangens függvény monotonitását! Vegyünk két  $-\frac{\pi}{2} < x < y < \frac{\pi}{2}$  számot. Ekkor  $\cos x > 0$ ,  $\cos y > 0$  és  $-\pi < x - y < 0$ , amiből  $\sin(x - y) < 0$  következik. Így

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\sin x \cos y - \cos x \sin y}{\cos x \cos y} = \frac{\sin(x - y)}{\cos x \cos y} < 0$$

ami azt jelenti, hogy a tangens függvény szigorúan monoton növekvő a  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  intervallumon. Hasonlóan igazolható, hogy a kotangens függvény szigorúan monoton csökkenő a  $]0, \pi[$  intervallumon. A periodicitást figyelembe véve azt mondhatjuk, hogy a tangens függvény

$$\text{szigorúan monoton növekvő a } ]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$$

intervallumokon minden  $k \in \mathbf{Z}$  esetén és nincs helyi szélsőértéke. Hasonlóan a kotangens függvény

$$\text{szigorúan monoton csökkenő a } ]k\pi, \pi + k\pi[$$

intervallumokon minden  $k \in \mathbf{Z}$  esetén és nincs helyi szélsőértéke.

A tangens függvény konvexitásának vizsgálatához legyen  $0 < x < y < \frac{\pi}{2}$  és vegyük észre, hogy a 12. Feladatban szerelő azonosságokból

$$\operatorname{tg}\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{\sin x + \sin y}{\cos x + \cos y}$$

következik. Ekkor

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\left(\frac{x+y}{2}\right) - \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{2} &= \frac{\sin x + \sin y}{\cos x + \cos y} - \frac{\sin x}{2 \cos x} - \frac{\sin y}{2 \cos y} = \\ &= \frac{2(\sin x + \sin y) \cos x \cos y - (\cos x + \cos y) \sin x \cos y - (\cos x + \cos y) \sin y \cos x}{2(\cos x + \cos y) \cos x \cos y} = \\ &= \frac{\sin x \cos x \cos y + \sin y \cos x \cos y - \sin x \cos^2 y - \sin y \cos^2 x}{2(\cos x + \cos y) \cos x \cos y} = \\ &= \frac{\sin x \cos y (\cos x - \cos y) - \cos x \sin y (\cos x - \cos y)}{2(\cos x + \cos y) \cos x \cos y} = \\ &= \frac{(\cos x - \cos y)(\sin x \cos y - \cos x \sin y)}{2(\cos x + \cos y) \cos x \cos y} = \frac{(\cos x - \cos y) \sin(x - y)}{2(\cos x + \cos y) \cos x \cos y} < 0 \end{aligned}$$

hiszen  $\cos x > 0$ ,  $\cos y > 0$ ,  $\cos x - \cos y > 0$  a koszinusz függvénynek a megadott intervallumon lévő monoton csökkenése miatt és  $\sin(x - y) < 0$ . Tehát

$$\operatorname{tg}\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{2},$$

ami azt jelenti, hogy a tangens függvény szigorúan gyengén konvex a  $]0, \frac{\pi}{2}[$  intervallumon. Mivel a tangens függvény monoton, így a 9. Tétel szerint a függvény

szigorúan konvex ezen az intervallumon. Hasonlóan igazolható, hogy a kotangens függvény is szigorúan konvex a  $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$  intervallumon. A paritás (lásd a 8. Tételt) és a periodicitás miatt azt kapjuk, hogy a tangens és a kotangens függvény

$$\begin{aligned} & \text{szigorúan konvex a} && \left]k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[ \text{ és} \\ & \text{szigorúan konkáv a} && \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, k\pi\right[ \end{aligned}$$

intervallumokon minden  $k \in \mathbf{Z}$  esetén.

További azonosságokat is megadhatunk a tangens és a kotangens függvényekre. Néhányuk az 51. Feladatban látható. Igazoláshoz alkalmazzuk a szinusz és koszinusz függvény azonosságait. A következő feladat olyan azonosságokat ad meg, amelyek fontos szerepet töltenek be az analízis későbbi fejezeteiben.

**13. Feladat.** *Igazoljuk, hogy ha  $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ , akkor*

$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{2t}{1+t^2}, & \cos x &= \frac{1-t^2}{1+t^2}, \\ \operatorname{tg} x &= \frac{2t}{1-t^2}, & \operatorname{ctg} x &= \frac{1-t^2}{2t}. \end{aligned}$$

*Megoldás:* A  $\sin 2x$  és  $\cos 2x$  kifejezésekre vonatkozó azonosságokból azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \sin x &= 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}}, \\ \cos x &= \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}}. \end{aligned}$$

Ha ezekben a kifejezésekben a számlálót és a nevezőt elosztjuk  $\cos^2 \frac{x}{2}$ -vel, akkor megkapjuk a feladat első két azonosságát. Innen pedig megkapjuk az azonosságokat tangensre és kotangensre is, ha ezeket egymással elosztjuk.

#### 4.6. Trigonometrikus függvények inverzei

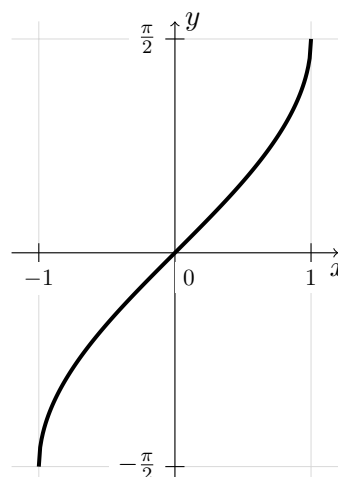
A tanult trigonometrikus függvények nem egy-egyértelmű függvények, ezért csak egy alkalmas intervallumra való leszűkítésük után invertálhatók. Olyan intervallumot választunk, ahol az invertálni kívánt trigonometrikus függvény szigorúan monoton. Az így kapott inverz függvényeket **arkusz-függvényeknek** nevezzük.

Az arkusz-függvények ábrázolásához érdemes újra áttekinteni a 2. Részben az inverz függvényről szóló leírtakat. Tulajdonságuk megadásához alkalmazni fogjuk a 3. Részben tanult 3., 4. és 6. Tételt.

A szinusz függvény szigorúan monoton növekvő a  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  intervallumon. A szinusz függvény ebbe az intervallumba képző inverzét **arkusz-szinusz függvénynek** hívjuk és  $\arcsin x$  módon jelöljük. Ekkor

$$\arcsin: [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

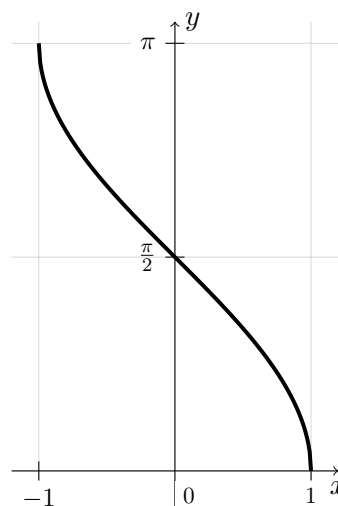
Az arkusz-szinusz függvény szigorúan monoton növekvő, illetve szigorúan konkáv a  $] -1, 0[$  és szigorúan konvex a  $]0, 1[$  intervallumon. Az ábra mutatja az arkusz-szinusz függvény grafikonját.



A koszinusz függvény szigorúan monoton csökkenő a  $[0, \pi]$  intervallumon. A koszinusz függvény ebbe az intervallumba képző inverzét **arkusz-koszinusz függvénynek** hívjuk és  $\arccos x$  módon jelöljük. Ekkor

$$\arccos: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi].$$

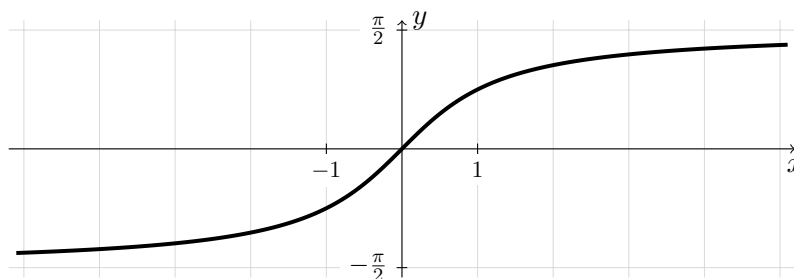
Az arkusz-koszinusz függvény szigorúan monoton csökkenő, illetve szigorúan konvex a  $] -1, 0[$  és szigorúan konkáv a  $]0, 1[$  intervallumon. Az ábra mutatja az arkusz-koszinusz függvény grafikonját.



Az tangens függvény szigorúan monoton növekvő a  $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$  intervallumon. A tangens függvény ebbe az intervallumba képző inverzét **arkusz-tangens függvénynek** hívjuk és  $\operatorname{arctg} x$  módon jelöljük. Ekkor

$$\operatorname{arctg}: \mathbf{R} \rightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

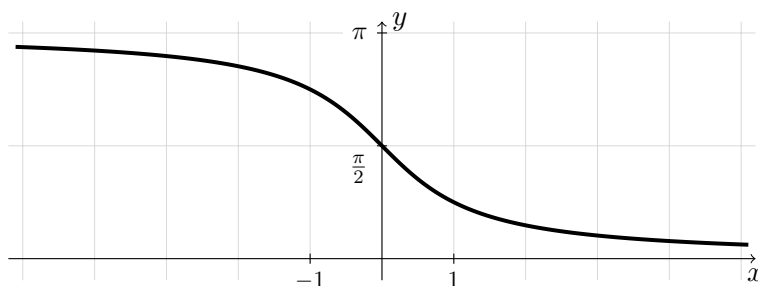
Az arkusz-tangens függvény szigorúan monoton növekvő, illetve szigorúan konvex a  $] -\infty, 0[$  és szigorúan konkáv a  $]0, \infty[$  intervallumon. A következő ábra mutatja az arkusz-tangens függvény grafikonját.



A kotangens függvény szigorúan monoton csökkenő a  $]0, \pi[$  intervallumon. A kotangens függvény ebbe az intervallumba képző inverzét **arkusz-kotangens függvénynek** hívjuk és  $\operatorname{arctg} x$  módon jelöljük. Ekkor

$$\operatorname{arctg}: \mathbf{R} \rightarrow ]0, \pi[.$$

Az arkusz-kotangens függvény szigorúan monoton csökkenő, illetve szigorúan konkáv a  $] -\infty, 0[$  és szigorúan konvex a  $]0, \infty[$  intervallumon. A következő ábra mutatja az arkusz-kotangens függvény grafikonját.



**14. Feladat.** Alakítsuk át a következő kifejezéseket algebrai alakúvá!

(a)  $\cos(\arcsin x)$ , (b)  $\operatorname{tg}(\arcsin x)$ , (c)  $\sin^2(\operatorname{arctg} x)$ .

Megoldás:

(a) Legyen  $y = \arcsin x$ . Ekkor  $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$  és  $\sin y = x$ . Így

$$\cos(\arcsin x) = \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2},$$

hiszen  $\cos^2 y + \sin^2 y = 1$  és  $\cos y \geq 0$ .

(b)

$$\operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{\sin(\arcsin x)}{\cos(\arcsin x)} = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (x \in ]-1, 1[)$$

(c) Legyen  $y = \operatorname{arctg} x$ . Ekkor  $\operatorname{tg} y = x$  és így, ha  $x \neq 0$

$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 y} = \frac{\cos^2 y}{\sin^2 y} = \frac{1 - \sin^2 y}{\sin^2 y} = \frac{1}{\sin^2 y} - 1,$$

amiből

$$\frac{1}{\sin^2 y} = \frac{1}{x^2} + 1 = \frac{1 + x^2}{x^2} \quad \implies \quad \sin^2(\operatorname{arctg} x) = \frac{x^2}{1 + x^2}.$$

Ha  $x = 0$ , akkor is fennáll az előző azonosság.

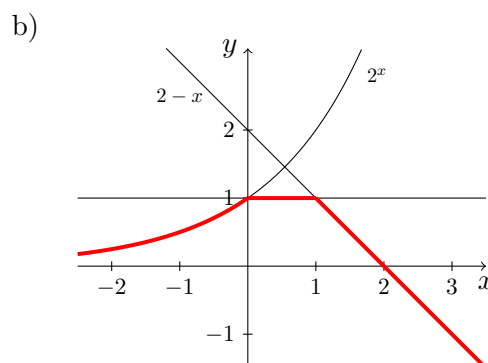
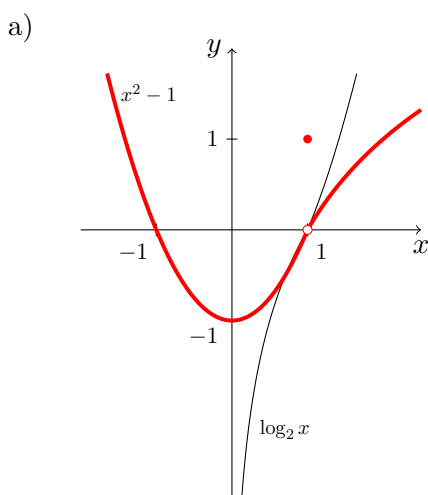
## 5. Függvények elemi ábrázolása

Ebben a részben egy egyszerű függvényábrázolási módszert mutatunk be, amely indulásként ismert függvények grafikonját használja fel, és ezek darabolásával vagy elemi transzformációk segítségével adja meg a keresett grafikont. Ekkor **függvények elemi ábrázolásáról** beszélünk. **Elemi transzformáció** alatt a geometriából ismert síkbeli egybevágósági és hasonlósági transzformációkat értjük, mint az eltolások, nagyítások, kicsinyítések, tükrözések és ezek egymásutánjaként kapott transzformációk. A kiindulásként szolgáló függvények a középiskolából jól ismert elemi függvények lehetnek, mint például a másodfokú, az abszolút érték, a reciprok, az exponenciális, a logaritmus és a trigonometrikus függvények. Ezeknek a grafikonját a tananyag előző részében mutattuk meg. A következő feladatokban történő függvényábrázolás ezzel a módszerrel készült.

**15. Feladat.** *Ábrázoljuk a következő függvényeket!*

$$a) f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{ha } x < 1, \\ 1 & \text{ha } x = 1, \\ \log_2 x & \text{ha } x > 1. \end{cases} \quad b) f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{ha } x < 0, \\ 1 & \text{ha } 0 \leq x \leq 1, \\ 2 - x & \text{ha } x > 1. \end{cases}$$

*Megoldás:* A feladatban szereplő függvények esetekből állnak. A függvények megadásáról szóló 2. részben már említettünk, hogy az ilyen függvényeket úgy ábrázoljuk, hogy először ábrázoljuk az egyes esetekben szereplő hozzárendelési szabályokhoz tartozó függvényeket és az egyes grafikonokból „kivágjuk” az adott esetnek megfelelő részt. Ezután minden görbedarabot „egymás mellé” illesztünk.





**16. Feladat.** *Ábrázoljuk a következő függvényeket! A készített ábrák alapján adjuk meg a függvények tulajdonságait!*

$$a) f(x) = |x - 1| + |x + 1|, \quad b) f(x) = 3|x - 2| - |2x - 1|.$$

*Megoldás:* Az abszolút értéket tartalmazó függvények értelmezési tartományát felbontjuk különböző esetekre úgy, hogy az egyes esetekhez tartozó képletekben már ne szerepeljen abszolút érték. Ehhez először meghatározzuk minden abszolút értéken belüli kifejezés előjelváltásait, amik gyakran megegyeznek a kifejezés zérushelyeivel. Ezek az értékek adják a keresett esetek határait. Ekkor a függvény képletében szereplő abszolút értékek belseje nem tud előjelet váltani egy adott esetben belül. Ezért az abszolút érték helyett csak zárójelet teszünk, ha az adott esetben az abszolút érték belseje nem negatív, illetve a zárójelen kívül még az előjelét is megváltoztatjuk, ha az adott esetben az abszolút érték belseje nem pozitív.

(a)  $x - 1$  zérushelye 1, és  $x + 1$  zérushelye  $-1$ . Így három eset lehetséges.

I.  $x \leq -1$ . Ekkor  $x - 1 \leq 0$  és  $x + 1 \leq 0$ , tehát

$$f(x) = -(x - 1) - (x + 1) = -2x.$$

II.  $-1 < x \leq 1$ . Ekkor  $x - 1 \leq 0$  és  $x + 1 \geq 0$ , tehát

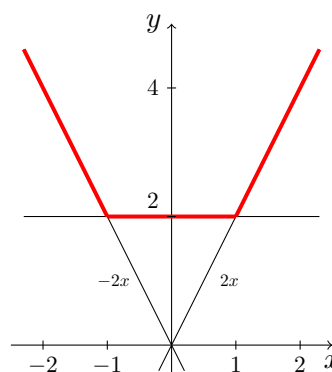
$$f(x) = -(x - 1) + (x + 1) = 2.$$

III.  $x > 1$ . Ekkor  $x - 1 \geq 0$  és  $x + 1 \geq 0$ , tehát

$$f(x) = (x - 1) + (x + 1) = 2x.$$

Összefoglalva

$$f(x) = \begin{cases} -2x & \text{ha } x \leq -1, \\ 2 & \text{ha } -1 < x \leq 1, \\ 2x & \text{ha } x > 1. \end{cases}$$



A grafikonból látjuk, hogy a függvény pozitív, alulról korlátos, nincsenek zérushelyei, páros, konvex, de nem szigorúan konvex, a  $] -\infty, -1]$  intervallumon szigorúan monoton csökkenő, a  $[-1, 1]$  intervallumon állandó, az  $[1, \infty[$  intervallumon szigorúan monoton növekvő függvény.

(b)  $x - 2$  zérushelye 2, és  $2x - 1$  zérushelye  $\frac{1}{2}$ . Így három eset lehetséges.

I.  $x \leq \frac{1}{2}$ . Ekkor  $x - 2 \leq 0$  és  $2x - 1 \leq 0$ , tehát

$$f(x) = -3(x - 2) + (2x - 1) = -x + 5.$$

II.  $\frac{1}{2} < x \leq 2$ . Ekkor  $x - 2 \leq 0$  és  $2x - 1 \geq 0$ , tehát

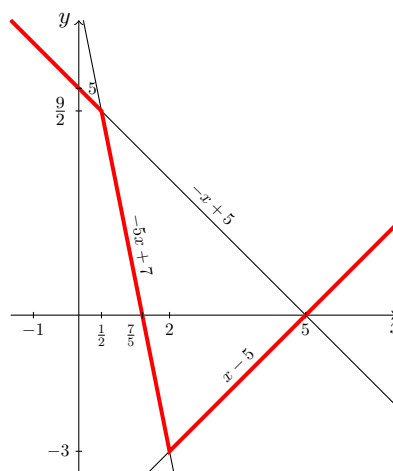
$$f(x) = -3(x - 2) - (2x - 1) = -5x + 7.$$

III.  $x > 2$ . Ekkor  $x - 2 \geq 0$  és  $2x - 1 \geq 0$ , tehát

$$f(x) = 3(x - 2) - (2x - 1) = x - 5.$$

Összefoglalva

$$f(x) = \begin{cases} -x + 5 & \text{ha } x \leq \frac{1}{2}, \\ -5x + 7 & \text{ha } \frac{1}{2} < x \leq 2, \\ x - 5 & \text{ha } x > 2. \end{cases}$$



A grafikonból látjuk, hogy a függvény alulról korlátos, két zérushelye van:  $x = \frac{7}{5}$  és  $x = 5$ , a  $] -\infty, 2]$  intervallumon szigorúan monoton csökkenő, a  $[2, \infty[$  intervallumon szigorúan monoton növekvő, az  $x = 2$  pontnál abszolút minimuma van, a  $] -\infty, 2[$  intervallumon konkáv (nem szigorúan) és a  $]\frac{1}{2}, \infty[$  intervallumon konvex (nem szigorúan).

Elevenítsük fel most a középiskolában már tanult **függvénytranszformációt**. Tegyük fel, hogy ismert a  $g$  függvény grafikonja és

$$f(x) = cg(ax + b) + d$$

ahol  $a, b, c, d$  valós számok, de  $a, c \neq 0$ . Hogyan kaphatjuk meg a  $g$  függvény grafikonjából az  $f$  függvény grafikonját? Például, az ismert szinusz függvényből kiindulva hogyan tudjuk ábrázolni az  $f(x) = -2 \sin(2x + \pi)$  függvényt?

Középiskolában azt tanultuk, hogy a  $g$  függvény grafikonjából induló, egymás után végzett elemi transzformációk sorozatával el tudjuk készíteni a keresett  $f$  függvény grafikonját. A képletben szereplő  $a, b, c$  és  $d$  számoktól függ, hogy milyen elemi transzformációkkal kell dolgozni. A következő tétel pontosan ezt fogja megadni. A tételt bizonyítás nélkül közöljük.

**12. Tétel** (Függvénytranszformáció).

Legyen a  $g$  valós függvény grafikonja ismert,  $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ ,  $a, c \neq 0$ . Ekkor

- (a) az  $f(x) = g(x + b)$  függvény grafikonját a  $g$  grafikonjának  $x$  tengely irányú eltolásával kapjuk meg úgy, hogy  $b > 0$  esetében az eltolást  $b$  egységgel „balra”,  $b < 0$  esetében  $b$  egységgel „jobbra” végezzük.
- (b) az  $f(x) = g(ax)$  függvény grafikonja a  $g$  grafikonjának  $x$  tengely irányú, az  $y$  tengelytől számított  $\frac{1}{|a|}$ -szoros nyújtásával<sup>†</sup> kapjuk meg, de ha még  $a < 0$ , akkor a grafikont az  $y$  tengelyre is tükrözzük.
- (c) az  $f(x) = cg(x)$  függvény grafikonja a  $g$  grafikonjának  $y$  tengely irányú, az  $x$  tengelytől számított  $|c|$ -szoros nyújtásával<sup>†</sup> kapjuk meg, de ha még  $c < 0$ , akkor a grafikont az  $x$  tengelyre is tükrözzük.
- (d) az  $f(x) = g(x) + d$  függvény grafikonját a  $g$  grafikonjának  $y$  tengely irányú eltolásával kapjuk meg úgy, hogy  $d > 0$  esetében  $d$  egységgel „felfelé”,  $d < 0$  esetében  $d$  egységgel „lefelé” toljuk el.

<sup>†</sup>1-nél kisebb pozitív számmal való nyújtás zsugorítást jelent.

Az előző tétel szerint, ha az  $f(x) = \sin(x + \pi)$  függvény grafikonját keressük, akkor a szinusz függvény grafikonját  $\pi$  egységgel balra eltoljuk az  $x$  tengely mentén, az  $f(x) = \sin 2x$  függvény esetén pedig a szinusz függvény grafikonját felére zsugorítjuk az  $x$  tengely mentén az  $y$  tengely felé. De mi történik akkor, ha az

$$f(x) = \sin(2x + \pi)$$

függvényt szeretnénk ábrázolni? Először a  $g_1(x) = \sin(x + \pi)$  függvényt ábrázoljuk az előzően leírt módon. Mivel

$$\sin(2x + \pi) = g_1(2x)$$

így az  $f(x) = \sin(2x + \pi)$  függvény grafikonját a  $g_1$  függvény grafikonjából kapjuk meg úgy, hogy felére zsugorítjuk az  $x$  tengely mentén az  $y$  tengely felé. Tehát a szinusz függvényből kiindulva két egymásutáni elemi transzformációval kapjuk meg a végeredményt.

Nagyon fontos ügyelni a megfelelő sorrendre. Ehhez vezessük be a következő függvényeket:

$$g_1(x) := g(x + b), \quad g_2(x) := g_1(ax), \quad g_3(x) := cg_2(x).$$

Könnyen igazolható, hogy ha  $f(x) = cg(ax + b) + d$ , akkor  $f(x) = g_3(x) + d$ . Tehát a 12. Tételben szereplő elemi transzformációkkal egymásután ábrázoljuk a  $g_1$ ,  $g_2$ ,  $g_3$  és  $f$  függvényeket a következő sorrendben

$$g \xrightarrow{b} g_1 \xrightarrow{a} g_2 \xrightarrow{c} g_3 \xrightarrow{d} f$$

ahol a nyilak fölött az a paraméter szerepel, ami az aktuális transzformációért felel. Természetesen, ha  $a$  vagy  $c$  eggyel,  $b$  vagy  $d$  nullával egyenlő, akkor a megfelelő lépés átugorható.

**17. Feladat.** *Ábrázolja a következő függvényeket!*

(a)  $f(x) = 2x^2 - 2x - 1$ ,

(b)  $f(x) = \frac{2x - 1}{2x - 2}$ ,

(c)  $f(x) = -2 \sin(2x + \pi)$ .

*Megoldás:* Egyenként fogjuk megrajzolni a függvénytranszformáció lépéseit. Ezek a lépések csak az animációk elindításakor láthatók.

(a) Teljes négyzetté alakítás után  $f(x) = 2 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{2}$ .

Ekkor  $a = 1$ ,  $b = -\frac{1}{2}$ ,  $c = 2$  és  $d = -\frac{3}{2}$ . A kiinduló függvény  $g(x) = x^2$ .

(b) Átalakítás után  $f(x) = \frac{1}{2x-2} + 1$ .

Ekkor  $a = 2$ ,  $b = -2$ ,  $c = 1$  és  $d = 1$ . A kiinduló függvény  $g(x) = \frac{1}{x}$ .

(c)  $f(x) = -2 \sin(2x + \pi)$ .

Ekkor  $a = 2$ ,  $b = \pi$ ,  $c = -2$  és  $d = 0$ . A kiinduló függvény  $g(x) = \sin x$ .

**18. Feladat.** *Ábrázoljuk a következő függvényeket! A készített ábrák alapján adjuk meg a függvények tulajdonságait!*

$$a) f(x) = |x^2 + 1| - 2|x|, \quad b) f(x) = |x^2 - 3x + 2| - 3|x + 3|,$$

$$c) f(x) = \frac{|x - 2|}{x + 3}, \quad d) f(x) = |3|x - 2| - |2x - 1||.$$

*Megoldás:* A 16. Feladathoz hasonlóan a függvények értelmezési tartományát felbontjuk különböző esetekre úgy, hogy az egyes esetekhez tartozó képletekben már ne szerepeljen abszolút érték. Ezután a különböző esetekben szereplő függvényeket függvénytranszformáció segítségével ábrázoljuk.

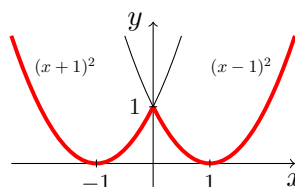
(a) A másodfokú függvényekről tanultak alapján  $x^2 + 1 > 0$ , így csak  $|x|$ -kel kell foglalkoznunk. Ez utóbbi zérushelye 0, vagyis két eset lehetséges.

I.  $x \leq 0$ . Ekkor  $f(x) = x^2 + 1 + 2x = (x + 1)^2$ .

II.  $x > 0$ . Ekkor  $f(x) = x^2 + 1 - 2x = (x - 1)^2$ .

Összefoglalva

$$f(x) = \begin{cases} (x + 1)^2 & \text{ha } x \leq 0, \\ (x - 1)^2 & \text{ha } x > 0. \end{cases}$$



A grafikonból látjuk, hogy a függvény nem negatív, azaz alulról korlátos. Két zérushelye van:  $x = -1$  és  $x = 1$ . A  $]-\infty, -1]$  és a  $[0, 1]$  intervallumon szigorúan monoton csökkenő, a  $[-1, 0]$  és a  $[1, \infty[$  intervallumon szigorúan monoton növekvő. Az  $x = -1$  és az  $x = 1$  pontoknál abszolút minimuma van, az  $x = 0$  pontnál lokális maximuma van. A  $]-\infty, 0[$  és a  $]0, \infty[$  intervallumon szigorúan konvex.

(b) Az  $x^2 - 3x + 2$  képlettel megadható függvénynek két zérushelye van: 1 és 2. A másodfokú függvényekről tanultak alapján  $x^2 - 3x + 2 \geq 0$ , ha  $x \leq 1$  vagy  $x \geq 2$ , illetve  $x^2 - 3x + 2 < 0$ , ha  $1 < x < 2$ . Másrészt  $x + 3 \geq 0$ , ha  $x \geq -3$  és  $x + 3 < 0$ , ha  $x < -3$ . A  $-3, 1$  és  $2$  pontok alapján négy esetre fogjuk bontani a feladatot.

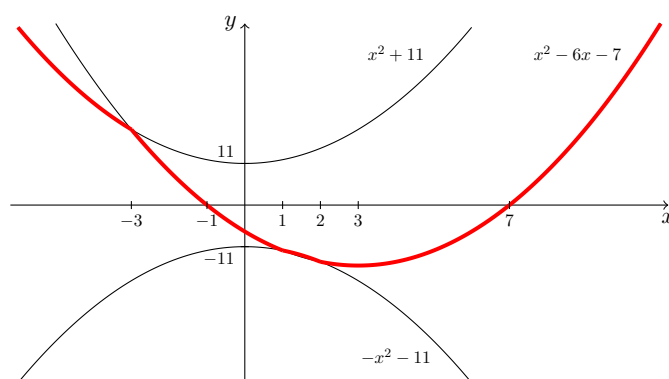
I.  $x \leq -3$ . Ekkor  $f(x) = (x^2 - 3x + 2) + 3(x + 3) = x^2 + 11$ .

II.  $-3 < x \leq 1$ . Ekkor  $f(x) = (x^2 - 3x + 2) - 3(x + 3) = x^2 - 6x - 7$ .

III.  $1 < x \leq 2$ . Ekkor  $f(x) = -(x^2 - 3x + 2) - 3(x + 3) = -x^2 - 11$ .

IV.  $x > 2$ . Ekkor  $f(x) = (x^2 - 3x + 2) - 3(x + 3) = x^2 - 6x - 7$ .

Vegyük észre, hogy a II. és a IV. eset ugyanahhoz a függvényhez vezet. A függvényt úgy ábrázoljuk, hogy először a  $x^2 + 11$ ,  $x^2 - 6x - 7$  és  $-x^2 - 11$  képlettel megadható függvényeket ábrázoljuk a már tanult függvénytranszformáció segítségével, majd ezekből a megfelelő görbeszakaszokat kiválasztjuk a már leírt esetek alapján.



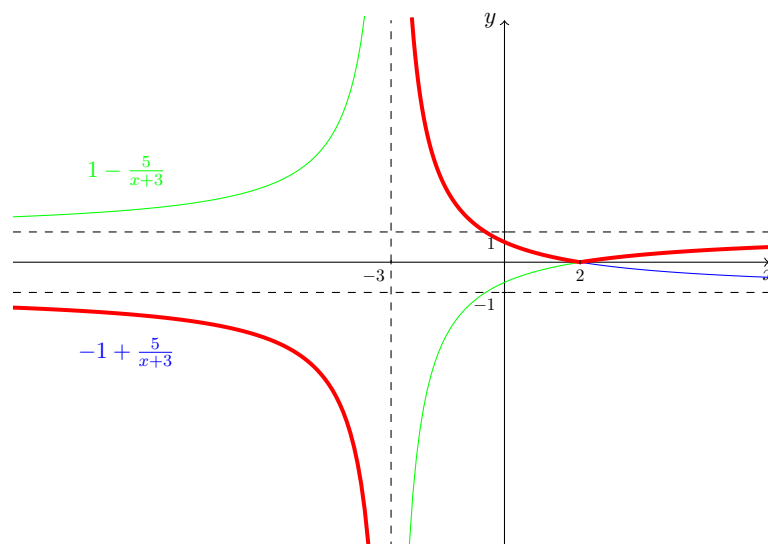
Azt látjuk, hogy a függvény alulról korlátos, abszolút minimuma van az  $x = 3$  helyen, mert ez megegyezik az  $x^2 - 6x - 7$  képlettel megadható függvény minimumhelyével. Két zérushelye van:  $x = -1$  és  $x = 7$ . A  $] -\infty, 3]$  intervallumon szigorúan monoton csökkenő, a  $[3, \infty[$  intervallumon szigorúan monoton növekvő. A  $] -\infty, -3[$ ,  $] -3, 1[$  és a  $]2, \infty[$  intervallumon szigorúan konvex, és az  $]1, 2[$  intervallumon szigorúan konkáv.

(c)  $x - 2 \geq 0$ , ha  $x \geq 2$  és  $x - 2 < 0$ , ha  $x < 2$ . Ezért két esetre fogjuk bontani a feladatot.

I.  $x \leq 2$ . Ekkor  $f(x) = \frac{-(x-2)}{x+3} = -1 + \frac{5}{x+3}$ .

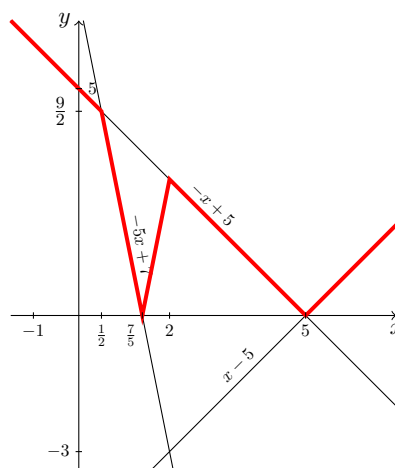
II.  $x > 2$ . Ekkor  $f(x) = \frac{x-2}{x+3} = 1 - \frac{5}{x+3}$ .

Ezután a már megtárgyalt módon ábrázoljuk a függvényt (piros színnel).



Azt látjuk, hogy a függvény nem korlátos. Zérus helye van az  $x = 2$  pontban. A  $] -\infty, -3[$  és  $] -3, 2]$  intervallumon szigorúan monoton csökkenő, a  $[2, \infty[$  intervallumon szigorúan monoton növekvő. Helyi minimuma van az  $x = 2$  helyen. A  $] -\infty, -3[$  és a  $]2, \infty[$  intervallumon szigorúan konkáv, illetve az  $] -3, 2[$  intervallumon szigorúan konvex.

- (d) A  $g(x) = 3|x-2| - |2x-1|$  függvény ábrázolásával már foglalkoztunk a 16. Feladatban. Mivel ennek abszolút értékeit kell ábrázolnunk, ezért annyi a teendő, hogy grafikonja negatív részét tükrözzük az  $x$  tengelyre. A végeredményt az ábrán találjuk.



Azt látjuk, hogy a függvény nem negatív, azaz alulról korlátos. Két zérushelye van:  $x = \frac{7}{5}$  és  $x = 5$ . Ezek a függvény minimumhelyei is. A  $] -\infty, \frac{7}{5}]$  és a  $[2, 5]$  intervallumon szigorúan monoton csökkenő, a  $[\frac{7}{5}, 2]$  és az  $[5, \infty[$  intervallumon szigorúan monoton növekvő. A  $] -\infty, \frac{7}{5}[$  és a  $]\frac{7}{5}, 5[$  intervallumon konkáv, az  $]\frac{1}{2}, 2[$  és a  $]2, \infty[$  intervallumon konvex.



## 6. Nevezetes egyenlőtlenségek

Ebben a részben az analízis további fejezeteiben előforduló nevezetes egyenlőtlenségeket fogjuk kimondani és igazolni. A középiskolában már tanult számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséggel kezdünk, de jóval általánosabb formában, sőt további közepeket is tanulunk majd a rájuk vonatkozó egyenlőtlenséggel együtt.

**14. Definíció.** Legyen  $n \in \mathbf{N}$  és  $x_1, \dots, x_n$  pozitív valós számok. Ezen számok

– **számtani közepének** mondjuk a következő számot:

$$A_n := \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

– **mértani közepének** mondjuk a következő számot:

$$G_n := \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}.$$

– **harmonikus közepének** mondjuk a következő számot:

$$H_n := \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}.$$

– **négyzetes közepének** mondjuk a következő számot:

$$Q_n := \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}}.$$

A számtani közepet **aritmetikai középnek** is szokták nevezni. Gyakran találkozunk vele a mindennapjainkban, pl. amikor eredményeket átlagolunk, ezért ezt egyszerűen átlagnak is mondják. A mértani közép másik elnevezése **geometriai közép** a geometriai jelentősége miatt. Például, a magasságtétel azt mondja ki, hogy derékszögű háromszögben az átfogóhoz tartozó magasságvonal hossza az átfogó két szelvényének mértani közepe. A harmonikus közép elnevezése onnan ered, hogy az

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

ún. harmonikus sorban minden tag a két szomszédjának harmonikus közepe. A harmonikus középpel ki tudunk számolni egyforma hosszúságú szakaszokon különböző sebességekkel mozgó test átlagsebességét. A négyzetes közepet gyakran hibaszámításkor alkalmazzák. A számtani és a négyzetes közepek tetszőleges számokra, míg a mértani közép nem negatív számokra is értelmezhető.

A számtani és a mértani közepek között fennáll a következő híres egyenlőtlenség.

**13. Tétel.** Legyen  $n \in \mathbf{N}$  és  $x_1, \dots, x_n$  pozitív valós számok. Ekkor

$$G_n \leq A_n.$$

Továbbá az egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ .

*Bizonyítás.* Az állítást teljes indukcióval bizonyítjuk. Az állítás nyilvánvalóan teljesül  $n = 1$  esetén.

Tegyük fel, hogy az állítás teljesül valamely  $n \in \mathbf{N}$  esetén, azaz tetszőleges  $n$  darab  $x_1, x_2, \dots, x_n$  pozitív valós szám esetén  $G_n \leq A_n$  teljesül és az egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ . Vegyünk tetszőleges  $n + 1$  darab pozitív valós számot és rendezzük őket növekvő  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{n+1}$  sorrendbe. Egyszerű átalakításokkal azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= \left( \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1}}{n+1} \right)^{n+1} = \left( \frac{nA_n + x_{n+1}}{n+1} \right)^{n+1} = \\ &= \left( A_n + \frac{x_{n+1} - A_n}{n+1} \right)^{n+1}. \end{aligned}$$

Mivel  $x_{n+1}$  a legnagyobb a számok közül, így

$$A_n = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \leq \frac{x_{n+1} + x_{n+1} + \dots + x_{n+1}}{n} = x_{n+1}$$

és az egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha  $x_{n+1} = x_1$ ,  $x_{n+1} = x_2, \dots$ ,  $x_{n+1} = x_n$ , azaz

$$x_{n+1} - A_n \geq 0 \quad \text{és} \quad x_{n+1} - A_n = 0 \quad \iff \quad x_1 = x_2 = \dots = x_{n+1}.$$

Ekkor a binomiális tételből következik, hogy

$$\begin{aligned} A_{n+1}^{n+1} &= \left( A_n + \frac{x_{n+1} - A_n}{n+1} \right)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} A_n^{n+1-k} \left( \frac{x_{n+1} - A_n}{n+1} \right)^k \geq \\ &\geq A_n^{n+1} + A_n^n (x_{n+1} - A_n), \end{aligned}$$

hiszen ez utóbbi két tag a binomiális összeg első két tagja ( $k = 0$  és  $k = 1$  esetén). A többi tag nem negatív, ezért ezeket a tagokat az alsó becslésben elhagytuk. Így a  $G_n \leq A_n$  indukciós feltevés miatt

$$A_{n+1}^{n+1} \geq A_n^{n+1} + A_n^n (x_{n+1} - A_n) = A_n^n x_{n+1} \geq G_n^n x_{n+1} = G_{n+1}^{n+1}.$$

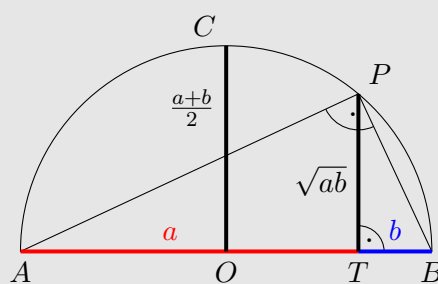
Ebből a gyökvonás egyértelműsége miatt következik, hogy  $G_{n+1} \leq A_{n+1}$ . Továbbá a fenti gondolatmenetben kisebb vagy egyenlő helyett egyenlőséget csak akkor írhattunk, ha  $x_{n+1} - A_n = 0$  és  $G_n = A_n$ , azaz abban az esetben, ha  $x_1 = x_2 = \dots = x_{n+1}$  teljesül. Ez azt jelenti, hogy az állítás teljesül  $n + 1$ -re is. Ezért teljes indukció alapján az állítás igaz minden  $n \in \mathbf{N}$  esetén. Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

Egyszerűbb módon is tudjuk igazolni a számtani és a mértani közepek közötti egyenlőtlenséget  $n=2$  esetén, azaz két pozitív  $x_1$  és  $x_2$  szám esetén, tudniillik négyzetre emelés és átrendezés után

$$\begin{aligned} \sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2} &\iff x_1 x_2 \leq \frac{(x_1 + x_2)^2}{4} \iff \\ \iff 4x_1 x_2 \leq x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2 &\iff 0 \leq x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2. \end{aligned}$$

Ez utóbbi ekvivalens a  $0 \leq (x_1 - x_2)^2$  egyenlőtlenséggel, ami nyilvánvalóan igaz, és az egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha  $x_1 = x_2$ .

A számtani és a mértani közepek közötti egyenlőtlenségnek van egy geometriai interpretációja is  $n = 2$  esetén. Tegyük egymásután egy  $a$  és  $b$  hosszúságú szakaszt, hogy ez egy Thalész-kör átmérője legyen és alkalmazzuk az ábrán található jelöléseket! Mivel a kör átmérőjének hossza  $a + b$ , így az  $OC$  szakasz hossza  $\frac{a+b}{2}$ , hiszen ez a kör sugara. Mivel az  $APB$  háromszög derékszögű, így a magasságtétel szerint a  $PT$  szakasz hossza  $\sqrt{ab}$ . Azonban nyilvánvaló, hogy a  $PT$  szakasz hossza kisebb vagy egyenlő, mint az  $OC$  szakasz hossza, és az egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha a  $T$  és az  $O$  pont egybeesik, azaz  $a = b$ . Ez pontosan a számtani és a mértani közepek közötti egyenlőtlenséget jelenti.



A számtani és a mértani közepek közötti egyenlőtlenségből azonnal következik a harmonikus és a mértani közepek közötti egyenlőtlenség.

**14. Tétel.** Legyen  $n \in \mathbf{N}$  és  $x_1, \dots, x_n$  pozitív valós számok. Ekkor

$$H_n \leq G_n.$$

Továbbá az egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ .

*Bizonyítás.* Alkalmazzuk a számtani és a mértani közepek közötti egyenlőtlenséget az  $\frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_n}$  számokra, azaz

$$\frac{1}{G_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{x_1} \cdots \frac{1}{x_n}} \leq \frac{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}}{n} = \frac{1}{H_n},$$

amiből a  $H_n \leq G_n$  következik. Továbbá az egyenlőség itt is csak az

$$\frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2} = \cdots = \frac{1}{x_n} \iff x_1 = x_2 = \cdots = x_n$$

esetben teljesül.

A számtani, mértani és a harmonikus közepek közötti egyenlőtlenség segítségével sok általános egyenlőtlenség igazolható.

**19. Feladat.** *Igazoljuk, hogy minden  $a, b, c$  pozitív szám esetén:*

$$a) \quad a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc,$$

$$b) \quad \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq a + b + c,$$

$$c) \quad (a + b + c)(ab + bc + ca) \geq 9abc.$$

*Megoldás:*

a) Alkalmazzuk a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséget az  $x_1 = a^2$ ,  $x_2 = b^2$  számok esetén. Ekkor

$$ab = \sqrt{a^2 b^2} \leq \frac{a^2 + b^2}{2} \quad \implies \quad a^2 + b^2 \geq 2ab$$

Alkalmazzuk a fenti eredményt a  $b, c$  és az  $a, c$  párokra! Így

$$b^2 + c^2 \geq 2bc \quad \text{és} \quad a^2 + c^2 \geq 2ac$$

Adjuk össze az előző három egyenlőtlenséget!

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2ac + 2bc,$$

amiből kettővel osztás után az igazolandó egyenlőtlenséget kapjuk.

b) Alkalmazzuk a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséget az  $x_1 = \frac{ab}{c}$ ,  $x_2 = \frac{ab}{c}$  számok esetén. Ekkor

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} \geq 2\sqrt{\frac{ab}{c} \frac{bc}{a}} = 2b.$$

Innentől ugyanúgy járunk el, mint az előző feladat: alkalmazzuk a fenti eredményt a  $\frac{bc}{a}$ ,  $\frac{ca}{b}$  és  $\frac{ab}{c}$ ,  $\frac{ca}{b}$  párokra, összeadjuk a kapott három egyenlőtlenséget és osztunk kettővel.

c) Alakítsuk át az igazolandó egyenlőtlenséget a következő módon!

$$\frac{a + b + c}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}.$$

Ez nem más, mint a számtani és a harmonikus közepek közötti egyenlőtlenség  $x_1 = a$ ,  $x_2 = b$ ,  $x_3 = c$  esetén.

Egy másik nevezetes egyenlőtlenség a Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-féle egyenlőtlenség.

**15. Tétel** (Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-féle egyenlőtlenség).

Legyen  $n \in \mathbf{N}$  és  $x_k, y_k \in \mathbf{R}$ , ahol  $k = 1, 2, \dots, n$ . Ekkor

$$\left( \sum_{k=1}^n x_k y_k \right)^2 \leq \left( \sum_{k=1}^n x_k^2 \right) \left( \sum_{k=1}^n y_k^2 \right).$$

*Bizonyítás.* Ha  $\sum_{k=1}^n x_k^2 = 0$ , akkor mindegyik  $x_k = 0$ , így az állítás triviálisan teljesül. Ellenkező esetben legyen

$$f(t) := \sum_{k=1}^n (x_k t + y_k)^2 \quad (t \in \mathbf{R}). \quad (9)$$

A négyzetösszeg miatt  $f(t) \geq 0$  minden  $t \in \mathbf{R}$  esetén. Az  $f$  függvény a következő módon írható át

$$f(t) = \left( \sum_{k=1}^n x_k^2 \right) t^2 + 2 \left( \sum_{k=1}^n x_k y_k \right) t + \sum_{k=1}^n y_k^2,$$

azaz  $f$  egy másodfokú függvény. A másodfokú függvényről tanultak alapján ennek nem lehet két különböző zérushelye, hiszen nem vehet fel negatív értékeket. Így a diszkriminánsa nem lehet pozitív, azaz

$$D = 4 \left( \sum_{k=1}^n x_k y_k \right)^2 - 4 \left( \sum_{k=1}^n x_k^2 \right) \left( \sum_{k=1}^n y_k^2 \right) \leq 0,$$

amiből átrendezés és négyzel való osztás után az igazolandó egyenlőtlenséget kapjuk.

Fontos megjegyezni, hogy a Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-féle egyenlőtlenségben az egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha mindegyik  $x_k = 0$  vagy a tétel bizonyításában szereplő  $f$  másodfokú függvény  $D$  diszkriminánsa nulla, és így az  $f$  függvénynek van zérushelye. Az  $f$  függvény (9) megadása miatt ez utóbbi akkor és csak akkor lehetséges, ha van olyan  $t$  szám, hogy  $x_k t + y_k = 0$  minden  $k = 1, 2, \dots, n$  esetén.

Figyeljük meg, hogy  $n = 2$  vagy  $n = 3$  esetén a Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-féle egyenlőtlenségnek van egy geometriai vetülete. Ha  $\mathbf{x}$  és  $\mathbf{y}$  azok a vektorok, amelynek koordinátái  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  és  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ , akkor az egyenlőtlenség baloldala a két vektor skaláris szorzatának négyzete, jobboldala a két vektor hosszának négyzete egymással összeszorozva. Ezért az egyenlőtlenséget megkaphatjuk az ismert

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = |\mathbf{x}| |\mathbf{y}| \cos \alpha$$

összefüggés négyzetre emeléséből is, ahol  $\alpha$  a két vektor által bezárt szög, hiszen  $|\cos \alpha|^2 \leq 1$ .

A Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-féle egyenlőtlenséget először **Cauchy** publikálta 1821-ben „Cours d’Analyse Algébrique” című könyvében. 1859-ben **Bunyakovszkij**, aki Cauchy-nak volt tanítványa, általánosította az egyenlőtlenséget végtelen összegekre és integrálokra, és publikálta a Szentpétervári Tudományos Akadémia Közleményeiben. 1988-ban **Schwarz** egyik munkájához szüksége volt az egyenlőtlenség integrálos alakjára, de nem ismerte Bunyakovszkij munkáját, ezért az egyenlőtlenségre adott egy teljesen más bizonyítást és sajátjaként publikálta. Emiatt az egyenlőtlenséget az orosz matematikai irodalomban Cauchy–Bunyakovszkij-féle, angol nyelvterületen Cauchy–Schwarz-féle egyenlőtlenségként ismerik.

A Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-féle egyenlőtlenség egyik következménye a számtani és négyzetes közepek közötti egyenlőtlenség.

**16. Tétel.** *Legyen  $n \in \mathbf{N}$  és  $x_1, \dots, x_n$  pozitív valós számok. Ekkor*

$$A_n \leq Q_n.$$

*Továbbá az egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ .*

*Bizonyítás.* Alkalmazzuk a Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-féle egyenlőtlenséget abban az esetben, ha  $y_k = 1$  minden  $k = 1, 2, \dots, n$  esetén! Így

$$\left( \sum_{k=1}^n x_k \right)^2 = \left( \sum_{k=1}^n x_k \cdot 1 \right)^2 \leq \left( \sum_{k=1}^n x_k^2 \right) \left( \sum_{k=1}^n 1^2 \right) \leq \left( \sum_{k=1}^n x_k^2 \right) \cdot n,$$

és az egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha van olyan  $t$  szám, hogy  $x_k t + 1 = 0$  minden  $k = 1, 2, \dots, n$  esetén, azaz minden  $x_k$  érték egyenlő. Az előző egyenlőtlenség  $n^2$ -tel való osztása után azt kapjuk, hogy

$$\left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right)^2 \leq \frac{1}{n} \left( \sum_{k=1}^n x_k^2 \right),$$

ami gyökvonás után az igazolandó egyenlőtlenséget adja.

Összefoglalva, azt igazoltuk, hogy pozitív számok harmonikus közepe kisebb vagy egyenlő, mint a számok mértani közepe, ami egyben kisebb vagy egyenlő, mint a számok számtani közepe, és ez utóbbi kisebb vagy egyenlő, mint a számok négyzetes közepe, azaz

$$H_n \leq G_n \leq A_n \leq Q_n.$$

Továbbá az egyenlőségek akkor és csak akkor állnak fenn, ha a számok egyenlőek.

Még hátra van egy nevezetes egyenlőtlenség.

**17. Tétel** (Bernoulli-féle egyenlőtlenség). *Legyen  $x \geq -1$  egy valós szám és  $n \in \mathbf{N}$ . Ekkor*

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$

*és az egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha  $n = 1$  vagy  $x = 0$ .*

*Bizonyítás.* A bizonyítás teljes indukcióval történik. Az állítás nyilvánvaló  $n = 1$  esetén. Tegyük fel, hogy van olyan  $n$ , amire igaz az állítás, azaz

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$

minden  $x \geq -1$  esetén, és az egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha  $n = 1$  vagy  $x = 0$ . Ha  $x \geq -1$ , akkor  $1 + x \geq 0$ , és így

$$\begin{aligned} (1 + x)^{n+1} &= (1 + x)^n(1 + x) \geq (1 + nx)(1 + x) = 1 + (n + 1)x + nx^2 \\ &\geq 1 + (n + 1)x, \end{aligned}$$

ahol az egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha  $x = 0$ . Ezért  $n + 1$ -re is igaz az állítás. Tehát a teljes indukció alapján állíthatjuk, hogy az állítás teljesül minden  $n \in \mathbf{N}$  esetén.

A matematikában és a fizikában több helyen is találkozunk a Bernoulli névvel, azonban ez nem csak egy személyt jelent, hiszen a Bernoulli család több kiváló matematikust adott a világnak. A fenti egyenlőtlenség a svájci matematikus **Jakob Bernoulli** (1654–1705) nevét orzi. Jacob Bernoulli nem csak kiemelt szerepet játszott az analízis fejlesztésében, hanem a sosemléletben, differenciálegyenletekben és a valószínűségszámításban is kiváló eredményeket ért el. Ő használta először az integrál elnevezést és annak  $\int$  jelét. Testvére **Johann Bernoulli** (1667-1748) idősebb bátyjától sajátította el az analízis fortélyait, bár tehetsége miatt nagyon hamar egyenrangú matematikusok lettek, és kezdeti együttműködésük rossz rivalizálássá fajult. Johann Bernoulli az analízisen kívül jelentős eredményeket ért el húrok rezgéseinek vizsgálatában, differenciálegyenletekben, koordinátageometriában és csillagászatban is.

## 7. Egyenlőtlenségek megoldása

A fennmaradó részben egyenlőtlenségek megoldásával fogunk foglalkozni. Az el-sajátítandó módszereket konkrét példák megoldásán keresztül fogjuk bemutatni. Több példa esetében különböző megoldást is adunk.

**20. Feladat.** Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket!

$$(a) |3x + 1| - |x| < \frac{1}{2},$$

$$(b) \left| \frac{2-x}{2x+1} \right| \leq \frac{1}{2},$$

$$(c) \frac{2x+5}{x+1} \leq \frac{x+10}{x+2},$$

$$(d) \sqrt{2-x} - \sqrt{x} > 1,$$

$$(e) \log_x(x^2 + x - 4) < 1,$$

$$(f) \sin x + \cos x > 1.$$

*Megoldás:*

(a) **1. megoldás.** A függvények elemi ábrázolásáról szóló részben láttuk hogyan érdemes abszolút értéket tartalmazó kifejezéseket különböző esetekre bontani úgy, hogy az egyes esetekhez tartozó képletekben már ne szerepeljen abszolút érték. A  $3x+1$  és az  $x$  kifejezések zérushelyei  $-\frac{1}{3}$  és  $0$ , amelyek szerint három esetet különböztetünk meg.

I.  $x \leq -\frac{1}{3}$ . Ekkor

$$|3x+1| - |x| = -(3x+1) + x = -2x - 1 < \frac{1}{2} \quad \implies \quad x > -\frac{3}{4}.$$

Ezért

$$-\frac{3}{4} < x \leq -\frac{1}{3}.$$

II.  $-\frac{1}{3} < x \leq 0$ . Ekkor

$$|3x+1| - |x| = (3x+1) + x = 4x+1 < \frac{1}{2} \quad \implies \quad x < -\frac{1}{8}.$$

Ezért

$$-\frac{1}{3} \leq x < -\frac{1}{8}.$$

III.  $x \geq 0$ . Ekkor

$$|3x+1| - |x| = (3x+1) - x = 2x+1 < \frac{1}{2} \quad \implies \quad x < -\frac{1}{4}.$$

Ezért ez az eset nem ad megoldást.

Összefoglalva, az egyenlőtlenség megoldása:  $\boxed{-\frac{3}{4} < x < -\frac{1}{8}}$



**2. megoldás.** Ábrázoljuk az

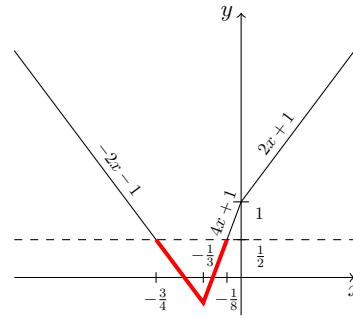
$$f(x) = |3x + 1| - |x|$$

függvényt! Az ábrából azt látjuk, hogy a függvény ott veszi fel az  $\frac{1}{2}$  értéket, ahol

$$-2x - 1 = \frac{1}{2} \quad \text{és} \quad 4x + 1 = \frac{1}{2},$$

azaz  $x = -\frac{3}{4}$  és  $x = -\frac{1}{8}$ .

Az ábrából is látjuk, hogy a két szám között lévő értékek adják a feladat megoldása, azaz  $\boxed{-\frac{3}{4} < x < -\frac{1}{8}}$ .



(b)  $2x + 1 \neq 0 \implies x \neq -\frac{1}{2}$ . Az abszolút érték tulajdonságai miatt

$$\left| \frac{2-x}{2x+1} \right| \leq \frac{1}{2} \quad \implies \quad -\frac{1}{2} \leq \frac{x-2}{2x+1} \leq \frac{1}{2},$$

azaz két egyenlőtlenséget kapunk, ahol az abszolút érték már nem szerepel. Ezek különböző módon oldhatók meg.

**1. megoldás.** Oldjuk meg külön az egyenlőtlenségeket és nézzük meg a két megoldáshalmaz metszetét!

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{x-2}{2x+1} \quad \implies \quad 0 \leq \frac{x-2}{2x+1} + \frac{1}{2} = \frac{4x-3}{2(2x+1)}.$$

Azaz  $4x - 3 \geq 0$  és  $2x + 1 > 0$  vagy  $4x - 3 \leq 0$  és  $2x + 1 < 0$ . Az első esetben  $x \geq \frac{3}{4}$  és a második esetben  $x < -\frac{1}{2}$ . Másrészt

$$\frac{x-2}{2x+1} \leq \frac{1}{2} \quad \implies \quad 0 \geq \frac{x-2}{2x+1} - \frac{1}{2} = \frac{-5}{2(2x+1)}.$$

amiből  $2x + 1 < 0$ , azaz  $x > -\frac{1}{2}$  következik. Így a két egyenlőtlenség megoldásának közös része:  $\boxed{x \geq \frac{3}{4}}$ .

**2. megoldás.** Kezeljük egyszerre az egyenlőtlenségeket és szorozzunk végig  $2x + 1$ -gyel. Ez egy elterjed módszer egyenletek esetén, de egyenlőtlenségeknél csak akkor tehetjük meg, ha tudjuk a szorzó kifejezés előjelét, hiszen ha negatív, akkor a reláció iránya megváltozik. Így két esetet kell vizsgálni.

I.  $x < -\frac{1}{2}$ . Ekkor  $2x + 1 < 0$ . A szorzás és 2 hozzáadása után azt kapjuk, hogy

$$-x + \frac{3}{2} \geq x \geq x + \frac{5}{2},$$

ami nem lehetséges.

II.  $x > -\frac{1}{2}$ . Ekkor  $2x+1 > 0$ . A szorzás és 2 hozzáadása után azt kapjuk, hogy

$$-x + \frac{3}{2} \leq x \leq x + \frac{5}{2},$$

ami a feladat megoldását adja:  $x \geq \frac{3}{4}$ .

(c) Átrendezés és közös nevezőre hozás után:

$$0 \geq \frac{2x+5}{x+1} - \frac{x+10}{x+2} = \frac{x^2-2x}{(x+1)(x+2)} = \frac{x(x-2)}{(x+1)(x+2)}.$$

Vizsgáljuk meg az  $x$ ,  $x-2$ ,  $x+1$  és  $x+2$  kifejezések előjeleit. Azok az  $x$  számok, ahol páratlan darab kifejezés negatív, megoldásai a feladatunknak. Továbbá  $x=0$  és  $x=2$  is megoldásai a feladatnak.

	$x < -2$	$-2 < x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 2$	$x > 2$
$x-2$	-	-	-	-	+
$x$	-	-	-	+	+
$x+1$	-	-	+	+	+
$x+2$	-	+	+	+	+

Előjel vizsgálat után a megoldás:  $-2 < x < 1$  vagy  $0 \leq x \leq 2$ .

(d) A feladatot négyzetre emeléssel fogjuk megoldani, de vigyázzunk, egyenlőtlenségeket csak akkor szabad négyzetre emelni, ha biztosak vagyunk abban, hogy mindkét oldala nem negatív.

A gyökvonás értelmezési tartományából azt kapjuk, hogy  $0 \leq x \leq 2$ . Emeljünk négyzetre az átrendezett  $\sqrt{2-x} > 1 + \sqrt{x}$  egyenlőtlenséget, amelynek már mindkét oldala nem negatív. Ekkor

$$2-x > 1 + 2\sqrt{x} + x \quad \implies \quad 1-2x > 2\sqrt{x},$$

ami csak az  $1-2x > 0$  feltétel mellett lehetséges, azaz  $x < \frac{1}{2}$ , hiszen jobb oldala nem negatív. Ezzel az egyenlőtlenség megoldását a  $0 \leq x < \frac{1}{2}$  intervallumon kell keresni. Mivel ilyen  $x$  értékek mellett a kapott egyenlőtlenség mindkét oldala nem negatív, így újra négyzetre tudjuk emelni.

$$1-4x+4x^2 > 4x \quad \implies \quad 4x^2-8x+1 > 0.$$

A fenti másodfokú egyenlőtlenség megoldása:  $x < 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$  vagy  $x > 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

A megkötések figyelembe vételével a megoldás:  $0 \leq x < 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

- (e) A logaritmus értelmezéséből  $x^2 + x - 4 > 0$ ,  $x > 0$  és  $x \neq 1$  adódik. A másodfokú egyenlőtlenség megoldása  $x < \frac{-1-\sqrt{17}}{2}$ , vagy  $x > \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$ . Így az összes feltétel figyelembe vétele után  $x > \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$ .  
A logaritmus alapját cserélhetjük le 2-re, így

$$\log_x(x^2 + x - 4) < 1 \quad \implies \quad \frac{\log_2(x^2 + x - 4)}{\log_2 x} < 1.$$

és mivel a kapott  $x$  értékekre  $\log_2 x > 0$  teljesül, hiszen  $x > \frac{-1+\sqrt{17}}{2} > 1$ , és a 2-es alapú logaritmus szigorúan monoton növekvő függvény, így

$$\log_2(x^2 + x - 4) < \log_2 x \quad \implies \quad x^2 + x - 4 < x.$$

Átrendezéssel az  $x^2 - 4 < 0$  másodfokú egyenlőtlenséget kapjuk, amelynek megoldása:  $-2 < x < 2$ .

A két feltételt összevetve a megoldás:  $\frac{-1 + \sqrt{17}}{2} < x < 2$ .

- (f) **1. megoldás.** Négyzetre emeléssel oldjuk meg a feladatot. Rendezzük át az egyenlőtlenséget a

$$\sin x > 1 - \cos x$$

módon. Mivel  $1 - \cos x \geq 0$ , így a  $\sin x > 0$  feltételnek teljesülnie kell, ami a  $2k\pi < x < \pi + 2k\pi$  ( $k \in \mathbf{Z}$ ) értékek mellett teljesül.

Négyzetre emelés után azt kapjuk, hogy  $\sin^2 x > 1 - 2\cos x + \cos^2 x$ , azaz

$$1 - \cos^2 x > 1 - 2\cos x + \cos^2 x \quad \implies \quad 2\cos^2 x - 2\cos x < 0.$$

A  $t = \cos x$  változó bevezetése után a  $t^2 - t < 0$  másodfokú egyenlőtlenséget kapjuk, amelynek megoldása  $0 < t < 1$ , azaz  $0 < \cos x < 1$ . Ennek megoldása:  $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$  ( $k \in \mathbf{Z}$ ).

Így az egyenlőtlenség megoldása:  $2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$  ( $k \in \mathbf{Z}$ ).

**2. megoldás.** Négyzetes tagokat négyzetre emelés nélkül is kaphatunk az  $x = 2y$  helyettesítéssel

$$\sin 2y + \cos 2y > 1 \quad \implies \quad 2\sin y \cos y + \cos^2 y - \sin^2 y > 1.$$

Az  $1 = \cos^2 y + \sin^2 y$  átírás és átrendezés után

$$2\sin y \cos y - 2\sin^2 y > 0 \quad \implies \quad \sin y(\cos y - \sin y) > 0.$$

Ekkor két eset lehetséges

I.  $\sin y > 0$  és  $\cos y - \sin y > 0$ . A második feltétel  $\sin y$ -nal való osztással átírható  $\operatorname{ctg} y > 1$  módon. A két feltétel megoldása:

$$2k\pi < y < \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad (k \in \mathbf{Z}).$$

II.  $\sin y < 0$  és  $\cos y - \sin y < 0$ . A második feltétel  $\sin y$ -nal való osztással átírható  $\operatorname{ctg} y > 1$  módon. A két feltétel megoldása:

$$\pi + 2k\pi < y < \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \quad (k \in \mathbf{Z}).$$

Az előző két megoldást össze lehet vonni a  $k\pi < y < \frac{\pi}{4} + k\pi$  ( $k \in \mathbf{Z}$ )

módon, azaz  $2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$  ( $k \in \mathbf{Z}$ ), ami a feladat megoldása.

**3. megoldás.** Alkalmazzuk a szorzattá való átalakítást! Tudjuk, hogy  $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ , így

$$\begin{aligned} \sin x + \cos x &= \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \\ &= 2 \sin\left(\frac{x + \frac{\pi}{2} - x}{2}\right) \cos\left(\frac{x - (\frac{\pi}{2} - x)}{2}\right) = \\ &= 2 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

Ezért az egyenlőtlenségünk  $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > \frac{\sqrt{2}}{2}$  alakban írható, amelynek megoldása  $-\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4} + 2k\pi$  ( $k \in \mathbf{Z}$ ), amiből a feladat

megoldása következik:  $2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$  ( $k \in \mathbf{Z}$ ).

**4. megoldás.** Alkalmazzuk az addíciós tételt! Szorozzuk meg az egyenlőtlenséget  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ -vel

$$\sin x \frac{\sqrt{2}}{2} + \cos x \frac{\sqrt{2}}{2} > \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \implies \quad \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) > \frac{\sqrt{2}}{2},$$

hiszen  $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . A fenti egyenlőtlenség megoldása

$$\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \quad (k \in \mathbf{Z}),$$

amiből a feladat megoldása következik:  $2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$  ( $k \in \mathbf{Z}$ ).

## 8. Feladatok

**21. Feladat.** Igazoljuk, hogy ha  $f$  egy valós függvény és  $c$  egy valós szám, akkor

$$(cf)^+(x) = c(f)^+(x) \quad \text{és} \quad (cf)^-(x) = c(f)^-(x),$$

ha  $c \geq 0$ , illetve

$$(cf)^+(x) = -c(f)^-(x) \quad \text{és} \quad (cf)^-(x) = -c(f)^+(x),$$

ha  $c < 0$  minden  $x \in D_f$  esetén!

**22. Feladat.** Igazak-e a következő állítások minden  $f$  és  $g$  valós függvény esetén?

1.  $(f + g)^+(x) = f^+(x) + g^+(x)$  minden  $x \in D_f$  esetén.

2.  $(fg)^+(x) = f^+(x)g^+(x)$  minden  $x \in D_f$  esetén.

**23. Feladat.** Igazoljuk, hogy ha  $f$  felülről korlátos, akkor  $f^+$  korlátos, és ha  $f$  alulról korlátos, akkor  $f^-$  korlátos!

**24. Feladat.** Igaz-e, hogy minden korlátos függvény inverze is korlátos?

**25. Feladat.** Igazoljuk, hogy ha  $f$  korlátos és  $g$  egy tetszőleges valós függvény, akkor  $f \circ g$  is korlátos!

**26. Feladat.** Adjunk példát két, nem korlátos függvényre, amelyre  $f \circ g$  korlátos!

**27. Feladat.** Vizsgáljuk a következő függvényeket korlátosság szempontjából!

(a)  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = |2x| - |x + 1| - |x - 1|$ ,

(b)  $f: [0, \infty] \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} x & \text{ha } 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{x} & \text{ha } x > 1, \end{cases}$

(c)  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \frac{x}{1 + x^2}$ .

**28. Feladat.** Legyen  $f$  és  $g$  két monoton csökkenő függvény és  $c > 0$ . Igazoljuk, hogy ekkor  $cf$  és  $f + g$  szintén monoton csökkenő függvények. Továbbá, ha még  $f$  és  $g$  nem negatív függvény, akkor  $fg$  szintén monoton csökkenő függvény.

**29. Feladat.** Lehet-e két nem monoton függvény összege szigorúan monoton növekvő?

**30. Feladat.** Adjunk példát két monoton növekvő függvény, amelynek szorzata monoton csökkenő!

**31. Feladat.** Adjunk meg olyan függvényt, amely invertálható, de nem monoton!

**32. Feladat.** Legyen  $f$  egy páros (páratlan) függvény, amely monoton növekvő az  $]a, b[$  intervallumon, ahol  $0 \leq a < b$ . Igazoljuk, hogy ekkor a függvény monoton csökkenő (növekvő) a  $] -b, -a[$  intervallumon! Mondjuk ki és igazoljuk az előzőnek megfelelő állítás, ha  $f$  monoton csökkenő az  $]a, b[$  intervallumon!

**33. Feladat.** Igazoljuk, hogy

- (a) ha  $f$  és  $g$  két nem pozitív, azonos szigorú monotonitású, konkáv függvény az  $I$  intervallumon, akkor  $fg$  szigorúan konvex az  $I$  intervallumon.
- (b) ha  $f$  és  $g$  két nem pozitív, különböző szigorú monotonitású, konvex függvény az  $I$  intervallumon, akkor  $fg$  szigorúan konkáv az  $I$  intervallumon.
- (c) ha  $f$  és  $g$  két nem negatív, különböző szigorú monotonitású, konkáv függvény az  $I$  intervallumon, akkor  $fg$  szigorúan konkáv az  $I$  intervallumon.

**34. Feladat.** Igazoljuk, hogy ha a 6. Tételben  $f$  szigorúan monoton csökkenő és (szigorúan) konkáv, akkor  $f|_I$  inverz függvénye (szigorúan) konkáv  $f(I)$ -n. Másrészt ha  $f$  szigorúan monoton növekvő és (szigorúan) konkáv, vagy  $f$  szigorúan monoton csökkenő és (szigorúan) konvex, akkor  $f|_I$  inverz függvénye (szigorúan) konvex  $f(I)$ -n.

**35. Feladat.** Legyen  $g$  egy szigorúan konvex (konkáv) függvény az  $I$  nyílt intervallumon, illetve  $I^*$  egy olyan nyílt intervallum, amire  $g(I) \subseteq I^*$  teljesül. Igazoljuk, hogy ha  $f$  egy olyan függvény, amely szigorúan monoton növekvő és konvex (konkáv) az  $I^*$  intervallumon, akkor az  $f \circ g$  függvény szigorúan konvex (konkáv) az  $I$  intervallumon.

**36. Feladat.** Legyen  $g$  egy konvex (konkáv) egy-egyértelmű függvény az  $I$  nyílt intervallumon, illetve  $I^*$  egy olyan nyílt intervallum, amire  $g(I) \subseteq I^*$  teljesül. Igazoljuk, hogy ha  $f$  egy olyan függvény, amely monoton növekvő és szigorúan konvex (konkáv) az  $I^*$  intervallumon, akkor az  $f \circ g$  függvény szigorúan konvex (konkáv) az  $I$  intervallumon.

**37. Feladat.** Legyen  $g$  egy konvex (konkáv) függvény az  $I$  nyílt intervallumon, illetve  $I^*$  egy olyan nyílt intervallum, amire  $g(I) \subseteq I^*$  teljesül. Igazoljuk, hogy ha  $f$  egy olyan függvény, amely monoton csökkenő és konkáv (konvex) az  $I^*$  intervallumon, akkor az  $f \circ g$  függvény konkáv (konvex) az  $I$  intervallumon.

**38. Feladat.** Legyen  $g$  egy szigorúan konvex (konkáv) függvény az  $I$  nyílt intervallumon, illetve  $I^*$  egy olyan nyílt intervallum, amire  $g(I) \subseteq I^*$  teljesül. Igazoljuk, hogy ha  $f$  egy olyan függvény, amely szigorúan monoton csökkenő és konkáv (konvex) az  $I^*$  intervallumon, akkor az  $f \circ g$  függvény szigorúan konkáv (konvex) az  $I$  intervallumon.

**39. Feladat.** Legyen  $g$  egy konvex (konkáv) egy-egyértelmű függvény az  $I$  nyílt intervallumon, illetve  $I^*$  egy olyan nyílt intervallum, amire  $g(I) \subseteq I^*$  teljesül. Igazoljuk, hogy ha  $f$  egy olyan függvény, amely monoton csökkenő és szigorúan konkáv (konvex) az  $I^*$  intervallumon, akkor az  $f \circ g$  függvény szigorúan konkáv (konvex) az  $I$  intervallumon.

**40. Feladat.** Igazoljuk, hogy ha az  $f$  függvény pozitív és konkáv egy nyílt intervallumon, akkor a függvény reciproka konvex az intervallumon!

**41. Feladat.** Igazoljuk, hogy a reciprok függvény páratlan, illetve a  $] -\infty, 0[$  és a  $]0, \infty[$  intervallumon külön-külön szigorúan monoton csökkenő, de nem monoton csökkenő az egész értelmezési tartományán!

**42. Feladat.** Az  $a$ ,  $b$ ,  $c$  és  $d$  számok segítségével állapítsuk meg az

$$f: \mathbf{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\} \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \quad (c \neq 0, bc \neq ad)$$

lineáris törtfüggvény monotonitási és konvexitási szakaszait!

**43. Feladat.** Igazoljuk, hogy minden lineáris törtfüggvény invertálható, és inverze, az előző feladatban szereplő jelölés mellett

$$f^{-1}: \mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{a}{c} \right\} \rightarrow \mathbf{R}, \quad f^{-1}(x) = \frac{-dx + b}{cx - a}.$$

**44. Feladat.** Készítsük el nagyon vázlatosan a következő függvények grafikonját!

$$\begin{array}{ll} a) f(x) = x^3 + x^2 - 6x, & b) f(x) = x^2 - x^4, \\ c) f(x) = x^4 + 4x^3 + 4x^2, & d) f(x) = x(x-2)^2(x^2+1), \\ e) f(x) = \frac{x^2-1}{x}, & f) f(x) = \frac{x}{x^2-1}, \\ g) f(x) = \frac{x}{x^2+1}, & h) f(x) = \frac{x^3}{x^2-4x}, \\ i) f(x) = \frac{(x-1)^2}{x(x+3)}, & j) f(x) = \frac{(x-1)^2}{x(x-3)}, \\ k) f(x) = \frac{x(x+1)^2}{(x-2)^2}, & l) f(x) = \frac{x^2(x^2+1)}{x(x-2)^2}. \end{array}$$

**45. Feladat.** Igazoljuk az exponenciális függvény **9.** Feladatból kimaradó alaptulajdonságait!

**46. Feladat.** Igazoljuk a logaritmus függvény alaptulajdonságait!

**47. Feladat.** Fejezzük be a **10.** Feladat megoldásából hiányzó azonosságok igazolását!

**48. Feladat.** Számoljuk ki  $\sin\left(\frac{18\pi}{4}\right)$  és  $\cos\left(\frac{-11\pi}{6}\right)$  pontos értékét!

**49. Feladat.** Bontsuk fel tényezőik szorzatára a  $\sin x + \cos x$  kifejezést!

**50. Feladat.** Bontsuk fel tényezőik szorzatára a  $\sin x - \cos x$  kifejezést!

**51. Feladat.** Igazoljuk, hogy az alábbi azonosságok érvényesek olyan  $x$  és  $y$  számok esetén, amelyekre az azonosságok értelmezhetők!

$$\begin{array}{ll} a) \operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}, & b) \operatorname{tg}(x-y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}, \\ c) \operatorname{ctg}(x+y) = \frac{\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y - 1}{\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y}, & d) \operatorname{ctg}(x-y) = \frac{\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y + 1}{\operatorname{ctg} y - \operatorname{ctg} x}, \\ e) \operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}, & f) \operatorname{ctg} 2x = \frac{\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x}{2}, \\ g) \operatorname{tg} 3x = \frac{3 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x}, & h) \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}. \end{array}$$

**52. Feladat.** Igazoljuk, hogy ha  $x + y + z = \pi$  teljesül, akkor

a)  $\sin 2x + \sin 2y + \sin 2z = 4 \sin x \sin y \sin z$ ,

b)  $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z$ , ha még az is igaz, hogy  $x, y, z$  pozitív,  $\frac{\pi}{2}$ -től különböző számok.

**53. Feladat.** Számítsuk ki a többi trigonometrikus függvény értékét, ha tudjuk, hogy

a)  $\sin x = \frac{1}{3}$ ,      b)  $\cos x = -\frac{3}{5}$ ,      c)  $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{2}$ .

**54. Feladat.** Alakítsuk át a következő kifejezéseket algebrai alakúvá!

a)  $\cos(2 \arcsin x)$ ,      b)  $\operatorname{tg}(\cos x)$ ,      c)  $\sin(2 \operatorname{arctg} x)$ .

**55. Feladat.** Ábrázoljuk a következő függvényeket és vizsgáljuk meg a tulajdonságaikat!

a)  $f(x) = |x| - |2x + 1|$ ,

b)  $f(x) = 4|x - 3| - 2|1 - 2x| - 4$ ,

c)  $f(x) = 2|x| - |2x + 1| + |x - 1|$ ,      d)  $f(x) = ||3 - 2x| + |x + 3| - 12|$ ,

e)  $f(x) = |x^2 + 4x| + 1$ ,

f)  $f(x) = x^2 - 2|x + 1|$ ,

g)  $f(x) = x|x - 2|$ ,

h)  $f(x) = |x^2 + 3x - 4| - |x^2 + 2x - 3|$ ,

i)  $f(x) = \frac{2x - 2}{x + 4}$ ,

j)  $f(x) = \frac{x}{|x - 2|}$ ,

k)  $f(x) = \frac{|x^2 + 5x|}{x^2}$ ,

l)  $f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 2x}{|x|}$ ,

m)  $f(x) = \sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$ ,

n)  $f(x) = 3 \sin(2x - \pi) + 1$ ,

o)  $f(x) = |2 \cos\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)| - 1$ ,

p)  $f(x) = |\operatorname{tg} 2x|$ ,

q)  $f(x) = \log_2 x^2$ ,

r)  $f(x) = 2^{|x-3|}$ .

**56. Feladat.** Igazoljuk, hogy minden  $a, b, c$  pozitív szám esetén:

a)  $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$ ,

b)  $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} \geq \frac{9}{2(a + b + c)}$ ,

c)  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ac}}$ ,

d)  $\frac{a + b}{c} + \frac{b + c}{a} + \frac{c + a}{b} \geq 6$ ,

e)  $\frac{ab}{a + b} + \frac{bc}{b + c} + \frac{ca}{c + a} \leq \frac{a + b + c}{2}$ ,

f)  $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \geq 4abcd$ ,

g)  $(a^2b + b^2c + c^2a)(ab^2 + bc^2 + ca^2) \geq 9a^2b^2c^2$ ,

h)  $a^4 + b^4 + 2 \geq 4ab$ ,

i)  $(a + b + c)(a^2b + b^2c + c^2a) \geq 9abc$ ,

j)  $a^2 + \frac{1}{a^2 + 1} \geq 1$ ,

k)  $\frac{c}{a} + \frac{a}{b + c} + \frac{b}{c} \geq 2$ ,

l)  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a + b}$ .



**57. Feladat.** Igazoljuk, hogy a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenség szintén teljesül nem negatív számok esetén!

**58. Feladat.** Igazoljuk, hogy ha  $a > b$  és  $ab = 1$ , akkor

$$\frac{a^2 + b^2}{a - b} \geq 2\sqrt{2}.$$

**59. Feladat.** Igazoljuk, hogy

$$\frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_\pi 2} > 2.$$

**60. Feladat.** Igazoljuk, hogy

$$n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

**61. Feladat.** Legyen  $n \in \mathbf{N}$  és  $x_i \geq -1$  valós számok minden  $i = 1, \dots, n$  esetén. Továbbá  $\text{sign } x_1 = \dots = \text{sign } x_n$ . Bizonyítsuk be, hogy

$$\prod_{i=1}^n (1 + x_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^n x_i.$$

**62. Feladat.** Tegyük fel, hogy az  $f$  függvény konvex az  $I$  intervallumon és legyen  $x_1, x_2, \dots, x_n \in I$ , valamint  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  legyenek olyan pozitív valós számok, amelyekre  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$  teljesül. Igazoljuk, hogy ekkor az

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_n f(x_n)$$

ún. Jensen-egyenlőtlenség teljesül. Igazoljuk továbbá, hogy ha  $f$  szigorúan konvex függvény, akkor az egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ . (Útmutató: Ez egyenlőtlenséget teljes indukcióval igazoljuk és alkalmazzuk a

$$\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k = \lambda_1 x_1 + (1 - \lambda_1) \sum_{k=2}^{n+1} \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_1} x_k$$

átalakítás az indukciós lépésben!)

**63. Feladat.** Alkalmazzuk a Jensen-egyenlőtlenséget a számtani, mértani és négyzetes közepek közötti egyenlőtlenségek bizonyításához az  $f(x) = x^2$ , illetve az  $f(x) = -\log_2 x$  függvények segítségével.

**64. Feladat.** Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket!

(a)  $|x + 2| - |2x| > 0,$

(b)  $||2x + 1| - |x - 1|| < 2,$

(c)  $\left| \frac{3x + 3}{x - 1} \right| \leq 1,$

(d)  $|2x + 1| < |x|,$

(e)  $\frac{4x - 2}{2x + 3} \geq \frac{2x + 1}{x - 2},$

(f)  $\frac{x + 21}{2x - 3} + \frac{3x + 7}{x + 2} > 0,$

(g)  $\sqrt{3x + 1} - \sqrt{x - 1} > 2,$

(h)  $\sqrt{3 - x} + \sqrt{8 - x} > \sqrt{x + 2},$

(i)  $\log_2 x + \log_4 x > 1,$

(j)  $\log_2 x^2 + \log_2 |x| < 3,$

(k)  $\sin 3x - \cos 2x + \sin x < 1,$

(l)  $\sin x + 2 \cos x > 1.$

## Ajánlott irodalom

- [1] Gecse Frigyes: *Matematikai alapok*, Z-press Kiadó Kft, Miskolc, 2013.
- [2] Kósa András: *Matematika – Halmazok, valós számok, függvények*, LSI Omak Alapítvány, 1990.
- [3] Laczkovich Miklós és T. Sós Vera: *Valós analízis I.*, Typotex kiadó, Budapest, 2012.
- [4] Leindler László – Schipp Ferenc: *Analízis I*, Tankönyvkiadó, 1985.
- [5] Sain Márton: *Nincs királyi út! : Matematikatörténet*, Gondolat Könyvkiadó, Budapest, 1986.
- [6] Száz Árpád: *Hatványozás és elemi függvények*, Debreceni Egyetem Kossuth Egyetemi Kiadó, Debrecen, 2001.
- [7] Toledo Rodolfo: *Halmazok, relációk, függvények*, elektronikus tananyag, 2016. <http://bit.ly/toledo-tananyag-halmazok>
- [8] Toledo Rodolfo: *Valós számok*, elektronikus tananyag, 2017. [http://bit.ly/toledo-tananyag-valos\\_szamok](http://bit.ly/toledo-tananyag-valos_szamok)

## Tárgymutató

- Addíciós tétel, 52
- $\arccos x$  függvény, 62
- $\arcsin x$  függvény, 62
- $\operatorname{arcctg} x$  függvény, 63
- $\operatorname{arctg} x$  függvény, 62
- Bernoulli-féle egyenlőtlenség, 79
- Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-féle egyenlőtlenség, 77
- Dirichlet-féle függvény, 9, 20
- egyenlőtlenségek megoldása, 80
- elemi függvények, 31
- elsőfokú függvény, 31
- exponenciális függvény, 45
- függvény
  - összetett, 15, 19, 24
  - abszolút szélsőértéke, 17
  - grafikonja, 8
  - gyöke, 12
  - gyengén konvexitása, 26
  - helyi szélsőértéke, 17
  - inverze, 16, 19, 24
  - Jensen-konvexitása, 26
  - konvexitása, 21
  - korlátos, 12
  - monotonitása, 14, 27
  - paritása, 18, 25
  - periodicitása, 20
  - pozitív, 11
  - zérushelye, 12
- függvénytranszformáció, 66, 67
- középek
  - harmonikus, 73, 75
  - mértani, 73–75
  - négyzetes, 73, 78
  - számtani, 73, 74, 78
- konstans függvények, 31
- koszinusz függvény, 50
- kotangens függvény, 58
- lineáris törtfüggvény, 38
- logaritmus függvény, 47
- másodfokú egyenlőtlenségek, 34
- másodfokú függvény, 32
- műveletek függvényekkel, 7
- $n$ -edik gyökfüggvény, 43
- $n$ -edik hatványfüggvény, 42
- polinomok, 31
- racióális törtfüggvények, 37
- reciprok függvény, 38
- szinusz függvény, 50
- tangens függvény, 58
- trigonometrikus függvények, 49
- valós függvények, 6
- Viète-formulák, 34