Folytonos függvények

Toledo Rodolfo

SZÉCHENYI 2020

Magyarország Kormánya

Európai Unió
Európai Szociális Alap

BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

Folytonos függvények

PDF fájlformátumban megjelent elektronikus tananyag

Szerző: Dr. Toledo Rodolfo Calixto, főiskolai tanár

Nyíregyházi Egyetem

Matematika és Informatika Intézet

Készült: 2019. november 15.

Korrektúra: Barsy Anna

Lektorálta: Dr. Blahota István, főiskolai tanár

ISBN 978-615-6032-09-6

Készült az alábbi pályázati projekt támogatásával:
EFOP-3.4.3-16-2016-00018 „Tudásfejlesztés és –hasznosítás a Nyíregyházi Egyetemen”

SZÉCHENYI 2020

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

A függvény folytonossága a valós függvények legfontosabb tulajdonságaihoz tartozik, ezért a függvény többi elemi tulajdonsága mellett a folytonosságot már középiskolában tanultuk. Ám a többi tulajdonsággal ellentétben a folytonosság fogalmát intuitív módon adták meg. Ennek az az oka, hogy amíg a függvény monotonitása, korlátossága, szélsőértékei, stb. egyszerűbb relációkkal fejezhető ki, a folytonosság mélyebb matematikai tudást igényel. Pedig nem tűnik olyan bonyolultnak, ha a függvény grafikonjából indulunk ki. A grafikon pontjai gyakran egy görbe vonalban állnak össze. Ez a görbe vonal egy adott pontban megszakadhat, hogy a pont másik oldalán túl egy másik görbe vonalat alkosson. A folytonos függvények lennének azok, amelyeknek grafikonja a ceruza felemelése nélkül megrajzolhatóak. Sajnos ez a középiskolában tanult intuitív kép nem felel meg teljesen a matematikai analízisben alkalmazott függvény folytonosságának.

A függvény fogalmát és a hozzá kapcsolódó általános elnevezéseket és jelöléseket a „Halmazok, relációk, függvények” című tananyagon vezettük be. A valós függvény tulajdonságaival már a „Valós függvények” című tananyagban foglalkoztunk. Ezekből megtudtuk, hogy a függvény fogalma nagyon általános, és egy valós függvény grafikonja nem feltétlenül áll össze görbe vonalakból. Arról nem is beszélve, hogy a geometrián alapuló intuitív fogalmakat szinte lehetetlen a gyakorlatban számolás útján ellenőrizni. Ezért a matematikai analízisben a folytonosságra egy „használhatóbb” fogalmat fogunk megadni.

Meglepő módon a folytonosságot nem az egész függvényre, hanem az értelmezési tartományának egyes pontjaira fogjuk először értelmezni. Lényegében akkor nevezünk egy függvényt valamely értelmezési tartománybeli pontjában folytonosnak, ha a pont kis megváltoztatása esetén a hozzátartozó érték is csak kicsit változik a pont megváltoztatásának függvényében. Természetesen ezt precíz matematikai eszközökkel fogjuk leírni. Ez az jelenti, hogy a folytonosság elsősorban pontbeli tulajdonság, és csak akkor mondjuk, hogy az egész függvény folytonos, ha minden értelmezési tartománybeli pontjában folytonos.

Az új fogalom változásokat hoz a középiskolában tanultakhoz képes. Például az

$$f\colon R\setminus\{0\}\to\mathbf{R},\qquad f(x):=\frac{1}{x}$$

függvény folytonos lesz, hiszen az $x=0$ nem értelmezési tartománybeli pont, és ezért ott nem vizsgálhatjuk meg a folytonosságot, azonban grafikonja nem rajzolható meg a ceruza felemelése nélkül. Azonban a dolgok mélyén az új fogalom nem hoz lényeges változást a középiskolában tanult függvényekhez képest, mégis alkalmazni tudjuk jóval „összetettebb” függvények esetében is.

A tananyag 2. Részében még csak a pontbeli folytonosság fogalmával ismerkedünk meg. A Cauchy-féle definícióból kiindulva grafikusan és két kidolgozott példával szemléltetjük az új fogalmat. De ezután áttérünk egy vele ekvivalens fogalomra, az ún. Heine-féle definícióra, amit végig „átviteli elvnek” fogunk nevezni a tananyag során. Az átviteli elv jelentősége, hogy vele a függvények pontbeli folytonossága visszavezethető sorozatok határértékszámítására. Ebben a részben szintén tárgyaljuk a függvények bal- és jobboldali folytonosságát egy megadott pontban.

A 3. Részben részletesen foglalkozunk az elemi függvények folytonosságával. Ehhez előbb meg kell néznünk, hogyan viszonyulnak a függvényműveletek, az inverz képzés és az összetett függvények a folytonossághoz. Azt fogjuk igazolni, hogy az elemi függvények folytonosak minden értelmezési tartománybeli pontjukban.

A „Valós függvények” című tananyagban megadtuk a valós függvények tulajdonságait, és vizsgáltuk a köztük lévő kapcsolatokat. Mivel a folytonosságot akkor még nem tanultuk, így a tanagyag 4. Részében szeretnénk pótolni ezt a hiányosságot úgy, hogy megvizsgáljuk, hogyan viszonyulnak az intervallumon értelmezett folytonos függvények a jeltartáshoz, a korlátossághoz, a szélsőértékekhez, a zérushelyekhez, a monotonitáshoz és a konvexitáshoz. Az egyik releváns eredmény az, hogy egy korlátos és zárt intervallumon értelmezett folytonos függvény korlátos, felveszi a maximumát, minimumát, és a köztük lévő értékeket. Ez a tulajdonság fontos például egyenletek numerikus megoldásainak megkeresése esetén.

Ezután egy olyan fogalom kerül tárgylásra, amely erősebb a folytonosságnál. Az egyenletes folytonosság egy nagyon hasznos tulajdonság, amivel többször találkozunk majd későbbi tanulmányainkban. Ezt már nem egy pontban, hanem egy halmazon értelmezzük, és légyege az, hogy a Cauchy-féle definícióban szereplő ε-tól függő δ „egyenletesen” adható meg a halmaz minden pontjára. Ilyenek tulajdonsággal rendelkeznek a korlátos és zárt intervallumon értelmezett folytonos függvények.

A függvény folytonossága olyan feltételeket követel a pont környezetétől, amelyek egyértelműen meghatározzák a függvény értékét a pontban. Ez azt jelenti, hogy ha egy függvény folytonos egy adott pontban, de nem ismerjük a függvény pontbeli értékét, akkor ezt a pont környezetében lévő értékek segítségével tudnánk meghatározni. Ez vezet a függvény pontbeli határérték fogalmához, ami az az érték, amelyet a függvénynek egy adott pontban kell felvennie, hogy ott folytonos legyen. Ez számos alkalmazást tesz lehetővé. Gondoljuk például az

$$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \qquad f(x) := 2^x$$

függvényre, amelyet az irracionális helyeken úgy értelmezünk, hogy a függvény folytonos legyen. Vagy egy mozgó testre, amelynek pillanati sebessége csak az adott időpont körüli elmozdulása alapján határozható meg, hiszen egy konkrét időpillanatban a test nem mozdul el. Nem csak a fizikában, hanem más tudományágakban is alkalmazzák a függvény pontbeli határértékét fogalmak megalkotására. A differenciálhányados is az ilyen fogalmak között szerepel. Ezért a függvény pontbeli határértéke a matematikai analízis egyik legfontosabb fogalma.

A 6. Részben felépítjük a határérték kiszámításához szükséges matematikai apparátust a L'Hospital szabály kivételével, hiszen az ehhez szükséges differenciálszámítás egy későbbi tananyag témája lesz. A következő részben már olyan esetet vizsgálunk, ahol a függvény pontbeli határértéke nem létezik. Ez különféle szakadási helyekhez vezet majd. Ehhez kapcsolódóan sok feladatot oldunk meg.

Az utolsó szakmai ismereteket tartalmazó részben is határértékszámításról lesz szó, de most is egy új fogalommal lesz dolgunk. A függvény határértéke a végtelenben és a mínusz végtelenben a függvénynek nagy értékű x pontokban történő viselkedését írja le. Arról szól, hogy merre tart a függvény görbéje, ha az x érték túlontúl nő vagy túlontúl csökken. Látni fogjuk, hogy itt gyakran tudjuk alkalmazni a sorozatok határértékére vonatkozó technikákat.

A tananyag feldolgozásának módszere a már kidolgozott

1. Halmazok, relációk, függvények [10]
2. Valós számok [11]
3. Valós függvények [12]
4. Számsorozatok és tulajdonságaik [13]
5. Határértékszámítás [14]

című tananyagokhoz hasonló, azaz a matematikában szokásos négyes tagozódásból áll: definíció, tétel, bizonyítás, alkalmazás (feladatok). A jobb megértést elősegíti, hogy a definíciókat egyszerű példákkal szemléltetjük. A definiált fogalmakra tételeket mondunk ki és precízen bizonyítjuk ezeket. A tananyag teljes elsajátításához több mintafeladatot oldunk meg. Az utolsó részben feladatokat tűzünk ki megoldás nélkül, melyek a lehetséges gyakorlati foglalkozások anyagát képezhetik. Megoldásuk előtt javasoljuk a tananyagban megoldott feladatok tanulmányozását és megértését.

A fejezetben $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$ és $\mathbf{R}$ szimbólumokkal jelöljük a természetes, egész és valós számok halmazát. Ha külön nem jelöljük, akkor az előforduló betűk (latin, görög) mindig valós számokat jelentenek.

2. A folytonosság fogalma

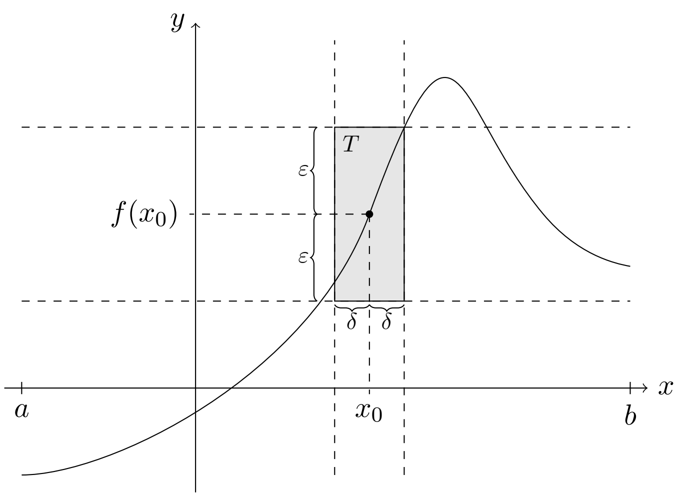
A bevezetésben leírtak szerint szakítani fogunk a folytonosság középiskolában tanult intuitív megközelítésével, és pontbeli fogalommá tesszük. Ez azt jelenti, hogy a folytonosságot először a függvény értelmezési tartományának egyes pontjaiban fogjuk értelmezni.

1. Definíció. *Legyen $H \subseteq \mathbf{R}$ és $f\colon H \to \mathbf{R}$ egy valós függvény. Azt mondjuk, hogy az f függvény az $x_0 \in H$ pontban folytonos, ha*

$\forall \varepsilon > 0$*-hoz* $\exists \delta > 0$*, hogy ha* $|x - x_0| < \delta$ *és* $x \in H$*, akkor* $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$*.*

Az előző definíciót a függvény pontban való folytonosságának Cauchy-féle definíciójaként is ismerik.

A következő ábrával szeretnénk szemléltetni az előző fogalmat. A definíció szerint az f függvény H értelmezési tartománya tetszőleges valós számhalmaz lehet, de a jobb szemléltetés érdekében tegyük fel, hogy $H =]a, b[$ egy nyílt intervallum, amelynek belső pontja x_0. Vegyünk egy tetszőleges $\varepsilon > 0$ számot és rajzoljunk egy, az x tengellyel párhuzamos 2ε szélességű sávot, amelynek szimmetriatengelye átmegy az $(x_0, f(x_0))$ koordinátájú ponton.



A definíció szerint, ha f folytonos az x_0 pontban, akkor rajzolhatunk egy, az y tengellyel párhuzamos 2δ szélességű sávot, amelynek szimmetriatengelye szintén átmegy az $(x_0, f(x_0))$ koordinátájú ponton, és az $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ értékek esetén a függvény grafikonja a

$$T =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\times]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[$$

téglalap belsejében halad.

Vegyük észre, hogy azok az x pontok, amire $|x-x_0|<\delta$ teljesül, az x_0 középpontú δ sugarú környezetet alkotják. Hasonlóan azok az y pontok, amire igaz, hogy $|y-f(x_0)|<\varepsilon$, az $f(x_0)$ középpontú ε sugarú környezetet adják. Ezért a függvény pontban való folytonossága a következő módon is fogalmazható:

> „egy függvény folytonos egy értelmezési tartománybeli pontban, ha a pont függvény szerinti képének bármely környezetéhez találunk a pontnak olyan környezetét, amely esetében minden benne található értelmezési tartománybeli elem függvény szerinti képe benne lesz a pont függvény szerinti képének szóban forgó környezetében."

Nézzünk néhány példát! Az

$$f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}, \qquad f(x):=x^2$$

függvény folytonos minden értelmezési tartománybeli pontjában, hiszen minden $x_0\in\mathbf{R}$ esetén, ha $\varepsilon>0$ tetszőleges és

$$\delta:=\sqrt{|x_0|^2+\varepsilon}-|x_0|,$$

ami nyilvánvalóan egy pozitív szám, akkor minden $|x-x_0|<\delta$ esetén

$$\begin{aligned}
|f(x)-f(x_0)| &= |x^2-x_0^2| = |x-x_0||x+x_0| = \\
&= |x-x_0||(x-x_0)+2x_0| \le \\
&\le |x-x_0|(|x-x_0|+2|x_0|) < \\
&< \delta(\delta+2|x_0|) = \delta^2+2\delta|x_0| = \\
&= (\sqrt{|x_0|^2+\varepsilon}-|x_0|)^2+2(\sqrt{|x_0|^2+\varepsilon}-|x_0|)|x_0| = \\
&= |x_0|^2+\varepsilon-2\sqrt{|x_0|^2+\varepsilon}|x_0|+|x_0|^2+2\sqrt{|x_0|^2+\varepsilon}|x_0|-2|x_0|^2 = \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Tehát minden $\varepsilon>0$-hoz találunk olyan $\delta>0$ számot, hogy ha $|x-x_0|<\delta$, akkor

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,$$

azaz az 1. Definícióban szereplő feltételek teljesülnek. Így az $f(x)=x^2$ függvény folytonos minden $x_0\in\mathbf{R}$ pontban.

Vegyük észre, hogy az előző példában δ nem csak ε-tól, hanem az x_0 pont megválasztásától is függ, hiszen a

$$\delta:=\sqrt{|x_0|^2+\varepsilon}-|x_0|=\frac{\varepsilon}{\sqrt{|x_0|^2+\varepsilon}+|x_0|}$$

átalakításból is látható, hogy minél nagyobb abszolút értékű x_0 pontban nézzük a folytonosságot, annál „meredekebb" lesz a függvény az x_0 pont környezetében, és így kisebb δ érték mellett tudjuk csak az $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ feltételt garantálni.

Vizsgáljuk meg most az

$$f\colon \mathbf{R}\setminus\{0\}\to\mathbf{R},\qquad f(x):=\frac{1}{x}$$

függvényt! Legyen $x_0\neq 0$ és $\varepsilon>0$ egy tetszőleges szám, továbbá

$$\delta:=\frac{\varepsilon|x_0|^2}{1+\varepsilon|x_0|}.$$

Nem nehéz igazolni, hogy $\delta<|x_0|$, illetve ha $|x-x_0|<\delta$, akkor $|x|>|x_0|-\delta$. Ez utóbbi az

$$|x_0|=|(x_0-x)+x|\leq|x-x_0|+|x|<\delta+|x|$$

becslésből következik. Ezért, ha $|x-x_0|<\delta$, akkor

$$\begin{aligned}|f(x)-f(x_0)|&=\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right|=\frac{|x-x_0|}{|x||x_0|}<\frac{\delta}{(|x_0|-\delta)|x_0|}=\\&=\frac{\varepsilon|x_0|^2}{1+\varepsilon|x_0|}\cdot\frac{1}{\left(|x_0|-\frac{\varepsilon|x_0|^2}{1+\varepsilon|x_0|}\right)|x_0|}=\\&=\frac{\varepsilon|x_0|}{(1+\varepsilon|x_0|)\left(|x_0|-\frac{\varepsilon|x_0|^2}{1+\varepsilon|x_0|}\right)}=\\&=\frac{\varepsilon|x_0|}{(1+\varepsilon|x_0|)|x_0|-\varepsilon|x_0|^2}=\frac{\varepsilon|x_0|}{|x_0|}=\varepsilon.\end{aligned}$$

Így az előző példához hasonlóan minden $\varepsilon>0$-hoz találunk olyan $\delta>0$ számot, hogy ha $|x-x_0|<\delta$, akkor

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

Tehát a definició alapján igazoltuk, hogy a függvény folytonos minden $x_0\neq 0$ pontban, azaz minden értelmezési tartománybeli pontban.

2. Definíció. *Akkor mondjuk, hogy egy valós függvény folytonos, ha minden értelmezési tartománybeli pontjában folytonos.*

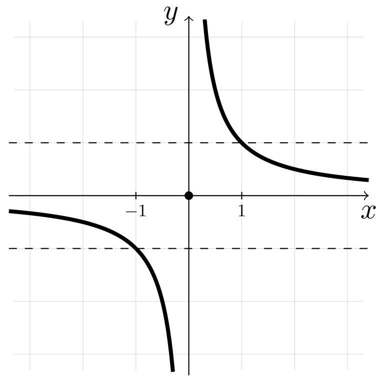
Az előző definíció értelmében az $f\colon\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x):=x^2$ függvény folytonos, és ez nem okoz meglepetést, ha figyelembe vesszük azt az intuitív fogalmat, amelyet a folytonosságról tanultunk középiskolában. De az előbb igazoltuk, hogy az

$$f\colon \mathbf{R}\setminus\{0\}\to\mathbf{R},\qquad f(x):=\frac{1}{x}$$

függvény minden értelmezési tartománybeli pontjában folytonos. Ez azt jelenti, hogy folytonos függvény, pedig teljes grafikonja a ceruza felemelése nélkül nem rajzolható meg.

Azonban ha értéket rendelünk az $x = 0$ ponthoz, akkor az így kapott $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0, \end{cases}$$



függvény nem folytonos, mert nem folytonos az $x_0 = 0$ pontban, amely már az értelmezési tartományához tartozik. Valóban, ha $\varepsilon = 1$ és $x \neq 0$, akkor

$$|f(x) - f(x_0)| = \left|\frac{1}{x} - 0\right| = \frac{1}{|x|} < 1 = \varepsilon$$

csak akkor teljesül, ha $|x| > 1$. De minden $\delta > 0$ esetén az $|x - x_0| < \delta$ (azaz $|x| < \delta$) egyenlőtlenséget teljesítő x értékek közül van olyan, amire $0 < |x| < 1$ teljesül. A fentiek szerint erre az x értékre $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ nem teljesülhet.

Azokat az értelmezési tartománybeli pontokat, ahol a függvény nem folytonos, **szakadási helyeknek** hívjuk. Ennek értelmében az

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0, \end{cases}$$

függvénynek szakadási helye van az $x = 0$ pontban.

Az 1. Definíció egyik meglepő követelménye, hogy ha a függvény értelmezési tartományának van egy izolált pontja, akkor ott a függvény folytonos, független attól, hogy milyen értéket vesz fel. Egy halmaz izolált pontja olyan halmazbeli elem, amelynek van olyan környezete, ami nem tartalmaz tőle különböző halmazbeli elemet. Például az

$$f(x) := \begin{cases} x^2, & \text{ha } x \in [0,1], \\ 0, & \text{ha } x = 2, \end{cases}$$

függvény értelmezési tartománya $H = [0,1] \cup \{2\}$, amelynek egy izolált pontja van, az $x_0 = 2$ helyen. Minden x_0 izolált pont esetén van olyan $\delta > 0$, hogy az összes értelmezési tartománybeli pontok közül csak x_0 tudja az $|x - x_0| < \delta$ feltételt teljesíteni. Az előző példában a $\delta = 1$ jó választás az $x_0 = 2$ pontra. Így az $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ feltételt csak $x = x_0$ esetén kell vizsgálni, ami nyilvánvalóan minden $\varepsilon > 0$ esetén teljesül. Ez azt jelenti, hogy a pontbeli folytonossághoz szükséges feltételek teljesülnek minden x_0 izolált pontban.

Ha a definíció alapján azt szeretnénk eldönteni, hogy egy függvény folytonos-e egy megadott pontban, akkor nagy ügyesség kell ahhoz, hogy az $|f(x) - f(x_0)|$ kifejezést megfelelő módon becsülni tudjuk. Előfordul az is, hogy az előző kifejezés bonyolultsága szinte lehetetlenné teszi a feladat megoldását. A pontbeli folytonosság eldöntésére van egy vele ekvivalens állítás, amelyet átviteli elvként vagy a pontban való folytonosság Heine-féle definíciójaként is ismerünk.

1. Tétel (Átviteli elv pontbeli folytonosságra)**.** *Legyen $H \subseteq \mathbf{R}$, illetve $f\colon H \to \mathbf{R}$ egy valós függvény. Ekkor az f függvény akkor és csak akkor folytonos az $x_0 \in H$ pontban, ha minden x_0 értékhez tartó, H-beli elemekből álló $\langle x_n \rangle$ sorozat esetén teljesül, hogy az $y_n := f(x_n)$ sorozat az $f(x_0)$ értékhez tart.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az f függvény folytonos az $x_0 \in H$ pontban és $\langle x_n \rangle$ egy olyan sorozat, amely H-beli elemekből áll és x_0-hoz tart. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. A pontbeli folytonosság definíciója szerint

$$\exists \delta > 0, \text{ hogy ha } |x - x_0| < \delta \text{ és } x \in H, \text{ akkor } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Az $x_n \to x_0$ határértékből következik, hogy

$$\exists n_0 \in \mathbf{N}, \text{ hogy } |x_n - x_0| < \delta, \text{ ha } n > n_0.$$

Mivel $x_n \in H$ és $|x_n - x_0| < \delta$, így $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$, ha $n > n_0$, ami a határérték fogalma szerint azt jelenti, hogy $f(x_n) \to f(x_0)$.

Másrészt tegyük fel, hogy az f függvény nem folytonos az $x_0 \in H$ pontban. Ekkor $\exists \varepsilon > 0$, hogy $\forall \delta > 0$-hoz találunk olyan $x \in H$ számot, amire

$$|x - x_0| < \delta \quad \text{és} \quad |f(x) - f(x_0)| > \varepsilon$$

teljesül. Legyen $\delta_n = \frac{1}{n}$ minden $n \in \mathbf{N}$ esetén és minden ilyen δ-hoz válasszunk olyan x_n H-beli értéket, amire a fenti két egyenlőtlenség teljesül. Így olyan sorozatot találtunk, ami H-beli elemekből áll, és

$$|x_n - x_0| < \frac{1}{n} \quad \text{és} \quad |f(x_n) - f(x_0)| > \varepsilon$$

teljesül. Az első egyenlőtlenség miatt $x_n \to x_0$, de a második egyenlőtlenség miatt $f(x_n) \not\to f(x_0)$. Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

Az átviteli elv jelentősége, hogy a függvények pontbeli folytonossága visszavezethető sorozatok határértékszámítására. Ez utóbbival már nagyon sokat foglalkoztunk a „Számsorozatok és tulajdonságaik”, valamint a „Határértékszámítás” című tananyagokban, így erről sok ismeret áll rendelkezésünkre. Lássuk, hogyan tudjuk ezt alkalmazni a gyakorlatban. Igazoljuk, hogy az

$$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \qquad f(x) := 2x^3 - x + 1$$

függvény folytonos! Legyen x_0 egy tetszőleges valós szám és $\langle x_n \rangle$ egy x_0-hoz tartó tetszőleges sorozat. A határátmenet és a műveletek felcserélhetőségéből következik, hogy ha $x_n \to x_0$, akkor

$$f(x_n) = 2x_n^3 - x_n + 1 \to 2x_0^3 - x_0 + 1 = f(x_0).$$

Így az átviteli elv alapján mondhatjuk, hogy az f függvény folytonos az x_0 pontban. Mivel x_0 tetszőleges volt, így azt igazoltuk, hogy a függvény folytonos.

1. Feladat. *A következő függvényeket a lehetséges legbővebb halmazokon értelmezzük. Melyik pontban folytonosak ezek a függvények?*

$(a)\quad f(x) := \dfrac{x}{x^2-1},$ $\qquad (b)\quad f(x) := |x|$

$(c)\quad f(x) := \operatorname{sign} x,$ $\qquad (d)\quad f(x) := x + \operatorname{sign} x,$

$(e)\quad f(x) := |x| \operatorname{sign} x,$ $\qquad (f)\quad f(x) := \operatorname{sign}(x^2 - x) + \operatorname{sign} x,$

$(g)\quad f(x) := \begin{cases} 0, & ha\ x \in \mathbf{Q}, \\ 1, & ha\ x \notin \mathbf{Q}, \end{cases}$ $\qquad (h)\quad f(x) := \begin{cases} 0, & ha\ x \in \mathbf{Q}, \\ x, & ha\ x \notin \mathbf{Q}. \end{cases}$

Megoldás:

(a) $\boxed{f(x) := \dfrac{x}{x^2-1}}$

A függvény minden valós számra értelmezhető, kivéve az $x = -1$ és $x = 1$ helyeken. Ha $x_0, x_n \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$ minden $n \in \mathbf{N}$ esetén és $x_n \to x_0$ egy tetszőleges sorozat, akkor a határátmenet és a műveletek felcserélhetőségből következik, hogy

$$f(x_n) = \frac{x_n}{x_n^2 - 1} \to \frac{x_0}{x_0^2 - 1} = f(x_0).$$

Így az átviteli elv alapján mondhatjuk, hogy az f függvény folytonos az x_0 pontban, azaz minden értelmezési tartománybeli pontjában folytonos.

(b) $\boxed{f(x) := |x|}$

Az abszolút érték függvény minden $x \in \mathbf{R}$ pontban értelmezhető. Igazolni fogjuk, hogy a függvény folytonos, és ezt kétféle módon is meg tudjuk tenni. Az első mód az átviteli elv alkalmazásával történik. Azt kellene igazolni, hogy minden $x_0 \in \mathbf{R}$ és $x_n \to x_0$ tetszőleges sorozat esetén $|x_n| \to |x_0|$, ami megtalálható a „Határértékszámítás” című tananyagban. A másik mód az

$$\big||x| - |y|\big| \le |x - y| \qquad (x, y \in \mathbf{R}) \tag{1}$$

egyenlőtlenségen alapszik, ami azért igaz, mert

$$|x| = |(x - y) + y| \le |x - y| + |y| \qquad \Longrightarrow \qquad |x| - |y| \le |x - y|$$

és

$$|y| = |x + (y - x)| \le |x| + |x - y| \qquad \Longrightarrow \qquad |x| - |y| \ge -|x - y|.$$

Az előző két egyenlőtlenséget összefoglalva

$$-|x-y| \leq |x|-|y| \leq |x-y|,$$

amiből (1) következik. Legyen most $x_0 \in \mathbf{R}$, $\varepsilon > 0$ tetszőleges és $\delta := \varepsilon$. Ekkor az előbb igazolt (1) egyenlőtlenség miatt, ha $|x-x_0| < \delta$, akkor

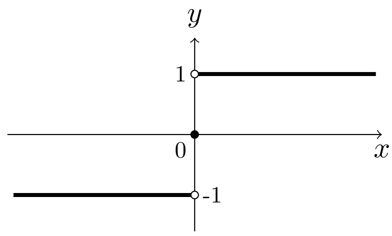
$$|f(x)-f(x_0)| = ||x|-|x_0|| \leq |x-x_0| < \delta = \varepsilon,$$

azaz a pontbeli folytonosság definíciója szerint az $f(x) = |x|$ folytonos tetszőleges $x_0 \in \mathbf{R}$ pontban.

(c) $\boxed{f(x) := \operatorname{sign} x}$

A szignum függvény értelmezése a következő:

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} -1, & \text{ha } x > 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0, \\ 1, & \text{ha } x > 0. \end{cases}$$



$f(x) = \operatorname{sign} x$

Legyen $x_0 > 0$ és $x_n \to x_0$ egy tetszőleges sorozat. Ekkor $x_n > 0$ véges sok n indextől eltekintve, és ezekre $f(x_n) = 1$ teljesül. Mivel $f(x_0) = 1$, így $f(x_n) \to f(x_0)$, azaz az átviteli elv szerint a függvény folytonos az x_0 pontban. Ezzel azt igazoltuk, hogy a függvény minden pozitív pontban folytonos, és hasonló módon igazolható, hogy a függvény szintén minden negatív pontban folytonos.
Ha $x_0 = 0$, akkor vegyük az $x_n := \frac{1}{n}$ sorozatot. Ekkor $f(x_0) = 0$, de $f(x_n) = 1$ minden $n \in \mathbf{N}$ esetén. Így $x_n \to x_0$, de $f(x_n) \not\to f(x_0)$, amiből következik, hogy a függvény nem folytonos az $x_0 = 0$ pontban.

(d) $\boxed{f(x) := x + \operatorname{sign} x}$

A függvény minden valós számra értelmezhető. Tegyük fel, hogy $x_0 \neq 0$ és $x_n \to x_0$ egy tetszőleges sorozat. Az előbb igazoltuk, hogy a szignum függvény folytonos az x_0 pontban, így az átviteli elv szerint igaz, hogy $\operatorname{sign} x_n \to \operatorname{sign} x_0$. Ezért

$$f(x_n) = x_n + \operatorname{sign} x_n \to x_0 + \operatorname{sign} x_0 = f(x_0).$$

Így az átviteli elv szerint f folytonos az x_0 pontban, azaz minden nem nulla pontban folytonos.
Ha $x_0 = 0$, akkor vegyük az $x_n := \frac{1}{n}$ sorozatot. Ekkor $f(x_0) = 0$, de $f(x_n) = \frac{1}{n}+1$ minden $n \in \mathbf{N}$ esetén. Így $x_n \to x_0$, de $f(x_n) \to 1 \neq f(x_0)$, amiből következik, hogy a függvény nem folytonos az $x_0 = 0$ pontban.

(e) $\boxed{f(x) := |x| \operatorname{sign} x}$

A függvény minden valós számra értelmezhető. Tegyük fel, hogy $x_0 \neq 0$ és $x_n \to x_0$ egy tetszőleges sorozat. Az előbb igazoltuk, hogy a szignum függvény folytonos minden nem nulla pontban, így az átviteli elv szerint $\operatorname{sign} x_n \to \operatorname{sign} x_0$. Továbbá az abszolút érték függvény folytonosságából következik, hogy $|x_n| \to |x_0|$. Ezért

$$f(x_n) = |x_n| \operatorname{sign} x_n \to |x_0| \operatorname{sign} x_0 = f(x_0).$$

Így az átviteli elv szerint f folytonos minden $x_0 \neq 0$ pontban.

Legyen $x_0 = 0$ és $x_n \to 0$ egy tetszőleges sorozat. Ekkor $f(x_0) = 0$, és mivel az abszolút érték függvény folytonos az $x_0 = 0$ pontban, így az átviteli elv szerint $|x_n| \to |0| = 0$. A $\operatorname{sign} x_n$ sorozatról nem tudjuk, hogy konvergens-e, de korlátos sorozat lesz, hiszen csak a -1, 0 vagy 1 értékeket vehet fel. A „Határértékszámítás” című tananyagban igazoltuk, hogy egy nullsorozat és egy korlátos sorozat szorzata tart nullához. Ezért

$$f(x_n) = |x_n| \operatorname{sign} x_n \to 0 = f(x_0).$$

Így az átviteli elv szerint f folytonos az $x_0 = 0$ pontban is.

(f) $\boxed{f(x) := \operatorname{sign}(x^2 - x) + \operatorname{sign} x}$

A másodfokú egyenlőtlenségekből tanultak szerint

$$x^2 - x \begin{cases} > 0 & \text{ha } x < 0 \text{ vagy } x > 1, \\ < 0 & \text{ha } 0 < x < 1, \\ = 0 & \text{ha } x = 0 \text{ vagy } x = 1, \end{cases}$$

amiből következik, hogy

$$\operatorname{sign}(x^2 - x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x < 0 \text{ vagy } x > 1, \\ -1 & \text{ha } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{ha } x = 0 \text{ vagy } x = 1. \end{cases}$$

Ha ezt összevetjük a szignum függvény értelmezésével azt kapjuk, hogy

$$\operatorname{sign}(x^2 - x) + \operatorname{sign} x = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 1, \\ 1 & \text{ha } x = 1, \\ 2 & \text{ha } x > 1. \end{cases}$$

Az átviteli elvvel könnyen igazolható, hogy a fenti függvény folytonos minden $x \neq 1$ pontban. Valóban, ha $x_0 < 1$ és $x_n \to x_0$ egy tetszőleges sorozat, akkor $x_n < 1$ véges sok n indextől eltekintve, és ezekre $f(x_n) = 0$ teljesül. Mivel $f(x_0) = 0$, így $f(x_n) \to f(x_0)$, azaz az átviteli elv szerint a függvény folytonos az x_0 pontban. Hasonlóan, ha $x_0 > 1$ és $x_n \to x_0$ egy tetszőleges sorozat, akkor $x_n > 1$ véges sok n indextől eltekintve, és ezekre $f(x_n) = 2$ teljesül. Mivel $f(x_0) = 2$, így $f(x_n) \to f(x_0)$, azaz az átviteli elv szerint a függvény folytonos az x_0 pontban. Végül, ha $x_0 = 1$, akkor vegyük az $x_n := 1 + \frac{1}{n}$ sorozatot. Ekkor $f(x_0) = 1$, de $f(x_n) = 2$ minden $n \in \mathbf{N}$ esetén. Így $x_n \to x_0$, de $f(x_n) \not\to f(x_0)$, amiből következik, hogy a függvény nem folytonos az $x_0 = 1$ pontban.

(g) $$\boxed{f(x) := \begin{cases} 0, & \text{ha } x \in \mathbf{Q}, \\ 1, & \text{ha } x \notin \mathbf{Q}, \end{cases}}$$

A függvény egyetlen egy pontban sem folytonos. Ennek igazolásához legyen x_0 egy tetszőleges valós szám. Mivel a racionális számok sűrűen helyezkednek el a számegyenesen, így van olyan racionális számokból álló $\langle x_n \rangle$ sorozat, amelyre $x_n \to x_0$ teljesül. Ugyanúgy az irracionális számok is sűrűen helyezkednek el a számegyenesen, ezért van olyan irracionális számokból álló $\langle y_n \rangle$ sorozat, amelyre $y_n \to x_0$ teljesül. De a függvény értelmezése szerint $f(x_n) = 0$ és $f(y_n) = 1$ minden $n \in \mathbf{N}$ esetén, azaz nem lehetséges, hogy egyszerre $f(x_n) \to f(x_0)$ és $f(y_n) \to f(x_0)$ is teljesüljön, és így az átviteli elv szerint f nem lehet folytonos az x_0 pontban.
A példában szereplő függvényt **Dirichlet-féle függvénynek** nevezzük.

(h) $$\boxed{f(x) := \begin{cases} 0, & \text{ha } x \in \mathbf{Q}, \\ x, & \text{ha } x \notin \mathbf{Q}, \end{cases}}$$

A függvény egyetlen egy pontban folytonos, és ez az $x = 0$ pont. Ennek igazolása a Dirichlet-féle függvénynél alkalmazott módszerrel történik. Legyen $x_0 \neq 0$ egy tetszőleges valós szám. Ha $x_n \to x_0$ egy racionális és $y_n \to x_0$ egy irracionális számokból álló sorozat, akkor $f(x_n) = 0$ és $f(y_n) = y_n$ minden $n \in \mathbf{N}$ esetén, azaz $f(x_n) \to 0$, de $f(y_n) \to x_0 \neq 0$, és így az átviteli elv szerint f nem lehet folytonos az x_0 pontban.
Legyen $x = 0$ és $x_n \to 0$ egy tetszőleges sorozat. Ekkor

- ha $\langle x_n \rangle$ legfeljebb véges sok irracionális elemet tartalmaz, akkor igaz, hogy $f(x_n) = 0$ véges sok elemtől eltekintve, azaz $f(x_n) \to 0$.
- ha $\langle x_n \rangle$ legfeljebb véges sok racionális elemet tartalmaz, akkor igaz, hogy $f(x_n) = x_n$ véges sok elemtől eltekintve, azaz $f(x_n) = x_n \to 0$.
- ha $\langle x_n \rangle$ végtelen sok racionális és irracionális elemet is tartalmaz, akkor fel tudjuk bontani két diszjunkt részsorozatra úgy, hogy $\langle x_n^{(1)} \rangle$ csak racionális és $\langle x_n^{(2)} \rangle$ csak irracionális elemekből álljon. Mivel mindkettő $\langle x_n \rangle$ részsorozata, így ők is tartanak a nullához. Másrészt $\langle f(x_n^{(1)}) \rangle$ és $\langle f(x_n^{(2)}) \rangle$ két diszjunkt részsorozata az $\langle f(x_n) \rangle$ sorozatnak, amelyekre $f(x_n^{(1)}) = 0 \to 0$ és $f(x_n^{(2)}) = x_n^{(2)} \to 0$ teljesül. Ezért $f(x_n) \to 0$.

Mindhárom esetben $f(x_n) \to 0 = f(x_0)$, ezért az átviteli elv szerint a függvény folytonos az $x_0 = 0$ pontban.

Azonnal látható, hogy ha egy függvény folytonos egy pontban, akkor a függvény bármely leszűkítése is folytonos ugyanebben a pontban, amennyiben ez a pont továbbra is eleme a leszűkített függvény értelmezési tartományának. Tudniillik, ha az f függvény H értelmezési tartományát leszűkítjük a H_0 halmazra úgy, hogy $x_0 \in H_0 \subseteq H$, akkor minden H_0-beli $x_n \to x_0$ sorozat egyben H-beli sorozat is. Így, ha az átviteli elv alkalmazható az $f\colon H \to \mathbf{R}$ függvényre az x_0 pontban, akkor szinten alkalmazható az $f\colon H_0 \to \mathbf{R}$ függvényre is.

Az előző állítás megfordítása nem minden esetben igaz, azaz nem minden, egy adott pontban folytonos függvény kiterjesztése marad folytonos ugyanebben a pontban. Például az

$$f\colon [0,\infty[\to \mathbf{R}, \qquad f(x) := 0$$

függvény folytonos az $x_0 = 0$ pontban, de ha a

$$g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \qquad g(x) := \begin{cases} 0, & \text{ha } x \geq 0, \\ 1, & \text{ha } x < 0, \end{cases}$$

módon kiterjesztjük a negatív számokra is, akkor ez utóbbi már nem lesz folytonos az $x_0 = 0$ pontban. Ennek oka az, hogy f esetében minden $x_n \to 0$ sorozat csak a 0 pont jobb oldaláról közelítheti meg a 0 pontot, és ekkor $f(x_n) = 0 \to 0 = f(0)$. Azonban g esetében egy $x_n \to 0$ sorozat a 0 pont bal oldaláról is megközelítheti a 0 pontot, de ekkor $g(x_n) = 1 \to 1 \neq 0 = g(0)$.

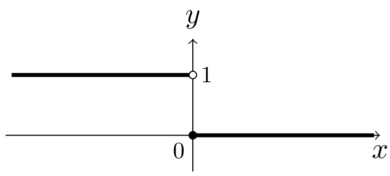
Ha az előző példát más szemszögből nézzük, akkor látjuk, hogy a g függvény nem folytonos az $x_0 = 0$ pontban, de ha leszűkítjük a pont jobb oldalára, akkor az f függvényt kapjuk, ami már folytonos az $x_0 = 0$ pontban. Ezzel a jelenséggel érdemes külön foglalkozni.

3. Definíció. *Legyen $H \subseteq \mathbf{R}$ és $f\colon H \to \mathbf{R}$ egy valós függvény. Azt mondjuk, hogy az f függvény*

- *balról folytonos az x_0 pontban, ha f a $H \cap]-\infty, x_0]$ halmazra való leszűkítése folytonos az x_0 pontban,*
- *jobbról folytonos az x_0 pontban, ha f a $H \cap [x_0, \infty[$ halmazra való leszűkítése folytonos az x_0 pontban.*

Az előző definíció értelmében a

$$g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \qquad g(x) := \begin{cases} 0, & \text{ha } x \geq 0, \\ 1, & \text{ha } x < 0, \end{cases}$$



függvény jobbról folytonos az $x_0 = 0$ pontban, hiszen az $\mathbf{R} \cap [0, \infty[$ halmazra való leszűkítése az azonosan nulla függvény. De ugyanebben a pontban nem folytonos balról, hiszen könnyen igazolhatjuk, hogy az átviteli elv nem alkalmazható az $\mathbf{R} \cap [-\infty, 0]$ halmazra való leszűkítésére az $x_0 = 0$ pontban.

Az átviteli elv nagyon hasznos a függvények pontbeli folytonosságának megállapítására. Nem meglepő tehát, hogy a definíció értelmében a bal- és jobboldali folytonosságot is sokszor úgy próbáljuk megállapítani, hogy az átviteli elvet alkalmazzuk a függvény megfelelő, bal- vagy jobboldali leszűkítésére. A következő állítás pontosan leírja, hogy ez hogyan történik.

2. Tétel (Átviteli elv bal- és jobboldali folytonosságra)**.** *Tegyük fel, hogy $H \subseteq \mathbf{R}$, $x_0 \in H$ és $f\colon H \to \mathbf{R}$ egy valós függvény. Ekkor az f függvény akkor és csak akkor*

- *balról folytonos az x_0 pontban, ha minden x_0 értékhez tartó, H-beli elemekből álló $\langle x_n \rangle$ sorozatra, amire még $x_n \leq x_0$ is teljesül minden $n \in \mathbf{N}$ esetén igaz, hogy az $y_n := f(x_n)$ sorozat az $f(x_0)$ értékhez tart.*
- *jobbról folytonos az x_0 pontban, ha minden x_0 értékhez tartó, H-beli elemekből álló $\langle x_n \rangle$ sorozatra, amire még $x_n \geq x_0$ is teljesül minden $n \in \mathbf{N}$ esetén igaz, hogy az $y_n := f(x_n)$ sorozat az $f(x_0)$ értékhez tart.*

Bizonyítás. A definíció szerint az $f\colon H \to \mathbf{R}$ függvény baloldali folytonossága az x_0 pontban ekvivalens az $f\colon H \cap]-\infty, x_0] \to \mathbf{R}$ függvény folytonosságával az x_0 pontban. Ez utóbbi az átvételi elv szerint azt jelenti, hogy minden x_0 értékhez tartó, $H \cap]-\infty, x_0]$-beli elemekből álló $\langle x_n \rangle$ sorozatra igaz, hogy az $y_n := f(x_n)$ sorozat az $f(x_0)$ értékhez tart. De az $x_n \in H \cap]-\infty, x_0]$ feltétel miatt $x_n \in H$ és $x_n \leq x_0$, ami a tétel állítását adja baloldali folytonosság esetén.

Az állítás igazolása jobboldali folytonosság esetén hasonlóan történik. Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

A folytonosságot külön tudjuk bontani bal és jobboldali folytonosságra. Ez az átviteli elv segítségével igazolható.

3. Tétel. *Egy függvény akkor is csak akkor folytonos egy pontban, ha ott balról és jobbról is folytonos.*

Bizonyítás. Már igazoltuk, hogy ha egy függvény folytonos egy pontban, akkor minden, a pontot tartalmazó leszűkítése is folytonos a pontban. Mivel a baloldali és jobboldali folytonosság két ilyen leszűkítéstől várja el a pontbeli folytonosságot, ezért mindkettő teljesülni fog, ha a függvény folytonos a pontban.

Tegyük fel most, hogy az $f\colon H \to \mathbf{R}$ függvény balról és jobbról folytonos az $x_0 \in H$ pontban. Legyen $x_n \to x_0$ egy H-beli sorozat. Ekkor három eset lehetséges.

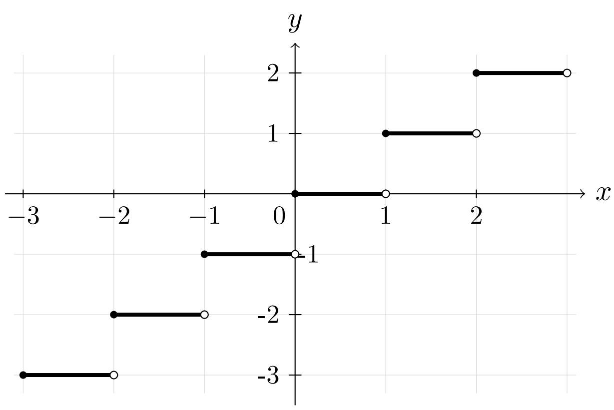
- Ha $x_n > x_0$ véges sok elem esetén, akkor ezek helyére írjuk az x_0 értéket az $\langle x_n \rangle$ sorozatban. Az így kapott $\langle x'_n \rangle$ sorozat legfeljebb véges sok elemben tér el az $\langle x_n \rangle$ sorozattól, így $x'_n \to x_0$, illetve $x'_n \leq x_0$ minden $n \in \mathbf{N}$ esetén. Mivel f balról folytonos az x_0 pontban, így az átviteli elv szerint $f(x'_n) \to f(x_0)$. De az $\langle f(x_n) \rangle$ sorozat is legfeljebb véges sok elemben tér el az $\langle f(x'_n) \rangle$ sorozattól, ezért ő is $f(x_0)$-hoz tart.

- Ha $x_n < x_0$ véges sok elem esetén, akkor ezek helyére írjuk az x_0 értéket az $\langle x_n \rangle$ sorozatban. Az így kapott $\langle x'_n \rangle$ sorozat legfeljebb véges sok elemben tér el az $\langle x_n \rangle$ sorozattól, így $x'_n \to x_0$, illetve $x'_n \geq x_0$ minden $n \in \mathbf{N}$ esetén. Mivel f jobbról folytonos az x_0 pontban, így az átviteli elv szerint $f(x'_n) \to f(x_0)$. De az $\langle f(x_n) \rangle$ sorozat is legfeljebb véges sok elemben tér el az $\langle f(x'_n) \rangle$ sorozattól, ezért ő is $f(x_0)$-hoz tart.

- Ha $\langle x_n \rangle$ végtelen sok x_0-nál kisebb és nagyobb elemet tartalmaz, akkor fel tudjuk bontani két diszjunkt részsorozatra úgy, hogy $\langle x_n^{(1)} \rangle$ csak x_0-nál kisebb és $\langle x_n^{(2)} \rangle$ csak x_0-nál nagyobb elemekből álljon. Mindkettő $\langle x_n \rangle$ részsorozata, azaz ők is tartanak az x_0-hoz. Ekkor $f(x_n^{(1)}) \to f(x_0)$, hiszen a függvény balról folytonos, illetve $f(x_n^{(2)}) \to f(x_0)$, hiszen a függvény jobbról folytonos. Másrészt $\langle f(x_n^{(1)}) \rangle$ és $\langle f(x_n^{(2)}) \rangle$ két diszjunkt részsorozata az $\langle f(x_n) \rangle$ sorozatnak, ezért ő is $f(x_0)$-hoz tart.

Mindhárom esetben $f(x_n) \to f(x_0)$, ezért az átviteli elv szerint a függvény folytonos az x_0 pontban. Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

A bal- és jobboldali folytonosságot nem csak egy pontban, hanem a teljes függvényre is kimondható, ha a függvény minden értelmezési tartománybeli pontban balról, illetve jobbról folytonos. Például az egész rész függvény jobbról folytonos. Ezt azonnal látható a függvény grafikonjáról, hiszen a benne szereplő egyenes szakaszok tartalmazzák a baloldali végpontjukat.



Az egész rész függvény jobboldali folytonosságát nem nehéz igazolni az átviteli elv segítségével. Ne felejtsük el, hogy az x szám egész része az a legnagyobb egész szám, amely kisebb vagy egyenlő mint x.

3. Elemi függvények folytonossága

Az elemi függvényekkel a „Valós függvények” című tananyagban részletesen foglalkoztunk. Igazolni fogjuk, hogy az elemi függvények folytonosak, azaz minden értelmezési tartománybeli pontjukban folytonosak. De ehhez előbb vizsgálnunk kell hogyan viszonyulnak a függvényműveletek, az inverz képzés és az összetett függvények a folytonossággal.

4. Tétel (Függvényműveletek és folytonosság)**.** *Legyen $H \subseteq \mathbf{R}$, $x_0 \in H$ és $c \in \mathbf{R}$, illetve $f, g\colon H \to \mathbf{R}$ két valós függvény. Ha az f és g függvények folytonosak az x_0 pontban, akkor a cf, $f+g$, $f-g$ és $f \cdot g$ függvények is folytonosak az x_0 pontban. Ha még $g(x_0) \neq 0$ teljesül, akkor az f/g függvény is folytonos az x_0 pontban.*

Bizonyítás. Az állítás rögtön következik a műveletek és a határátmenet felcserélhetőségéből. Tudniillik az átviteli elv szerint, ha $x_n \to x_0$ egy tetszőleges H-beli sorozat, akkor az f és g függvények folytonossága miatt $f(x_n) \to f(x_0)$ és $g(x_n) \to g(x_0)$ következik. Ezért

- $(cf)(x_n) = cf(x_n) \to cf(x_0) = (cf)(x_0)$,
- $(f+g)(x_n) = f(x_n) + g(x_n) \to f(x_0) + g(x_0) = (f+g)(x_0)$,
- $(f-g)(x_n) = f(x_n) - g(x_n) \to f(x_0) - g(x_0) = (f-g)(x_0)$,
- $(f \cdot g)(x_n) = f(x_n)g(x_n) \to f(x_0)g(x_0) = (f \cdot g)(x_0)$,
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x_n) = \dfrac{f(x_n)}{g(x_n)} \to \dfrac{f(x_0)}{g(x_0)} = \left(\dfrac{f}{g}\right)(x_0)$, ha $g(x_0) \neq 0$.

Ezzel a tétel állításait igazoltuk.

Az előző tétel szerint a függvényműveletek tovább adják a folytonosságot. Hasonló a helyzet az összetett függvények esetében.

5. Tétel (Összetett függvény folytonossága)**.** *Legyen $H_1, H_2 \subseteq \mathbf{R}$, illetve $g\colon H_1 \to \mathbf{R}$ és $f\colon H_2 \to \mathbf{R}$ két valós függvény. Továbbá $x_0 \in H_1$, illetve $y_0 := g(x_0) \in H_2$. Ekkor, ha a g függvény folytonos az x_0 pontban és az f függvény folytonos az y_0 pontban, akkor az $(f \circ g)(x) := f(g(x))$ összetett függvény folytonos az x_0 pontban.*

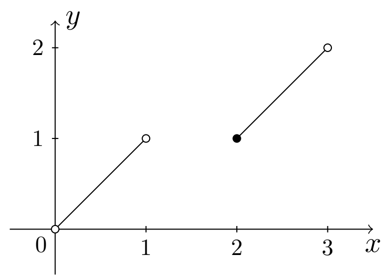
Bizonyítás. A „Halmazok, relációk, függvények” című tananyagban adtuk meg az $f \circ g$ összetett függvény fogalmát. Azt tanultunk, hogy ennek értelmezési tartománya a $H := g^{-1}(R_g \cap D_f)$ halmaz, azaz azok az x számok, amire $x \in H_1$ és $g(x) \in H_2$ teljesül. Ezért ha $x_n \to x_0$ egy tetszőleges H-beli sorozat, akkor $\langle x_n \rangle$ egy H_1-beli sorozat, és $y_n := g(x_n)$ egy H_2-beli sorozat.

Mivel g folytonos az x_0 pontban, így az átviteli elv szerint $g(x_n) \to g(x_0)$, azaz $y_n \to y_0$. De f folytonos az y_0 pontban, így szintén az átviteli elv szerint $f(y_n) \to f(y_0)$, azaz
$$f(g(x_n)) \to f(g(x_0)),$$
amiből az $f \circ g$ függvény folytonossága következik.

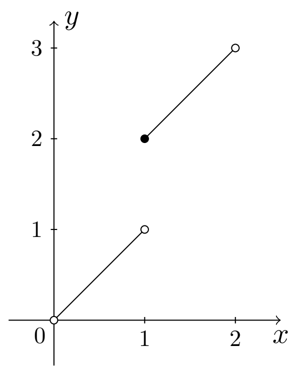
Ezzel a tétel állításait igazoltuk.

Az előző pozitív eredmények után azt várnánk, hogy hasonló állítás igaz legyen az inverz képzésre, azaz hogy egy invertálható folytonos függvény inverze mindig folytonosnak kell lennie. Azonban találunk olyan invertálható folytonos függvény, amelynek inverz függvénye nem folytonos.

Például az $f\colon]0,1[\cup[2,3[\to \mathbf{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{ha } 0 < x < 1, \\ x-1 & \text{ha } 2 \le x < 3, \end{cases}$$
függvény folytonos, ami a grafikonjából rögtön látható az első jobboldali ábrán.



Azonban inverze az $f^{-1}\colon]0,2[\to \mathbf{R}$
$$f^{-1}(y) = \begin{cases} y & \text{ha } 0 < y < 1, \\ y+1 & \text{ha } 1 \le y < 2, \end{cases}$$
függvény nem folytonos az $y_0 = 1$ pontban, ami a grafikonjából rögtön látható a második jobboldali ábrán.



Olyan folytonos függvényt is meg tudunk adni, amelynek inverze egyetlen egy pontjában sem folytonos. Például legyen
$$f\colon (]0,1[\cap\mathbf{Q}) \cup (]1,2[\cap\overline{\mathbf{Q}}) \to \mathbf{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} x & \text{ha } x \in]0,1[\cap\mathbf{Q}, \\ x-1 & \text{ha } x \in]1,2[\cap\overline{\mathbf{Q}}, \end{cases}$$
ahol $\overline{\mathbf{Q}}$ jelöli az irracionális számok halmazát. Ekkor f folytonos, de inverze
$$f^{-1}\colon]0,1[\to \mathbf{R}, \qquad f^{-1}(x) = \begin{cases} y & \text{ha } y \in]0,1[\cap\mathbf{Q}, \\ y+1 & \text{ha } y \in]0,1[\cap\overline{\mathbf{Q}}, \end{cases}$$
egyetlen egy pontjában sem folytonos. Mégis bizonyos feltételek teljesülése mellett garantálható az inverz függvény folytonossága annak egyes pontjaiban.

6. Tétel (Inverz függvény folytonossága I.). *Legyen $H \subseteq \mathbf{R}$, $f\colon H \to \mathbf{R}$ egy szigorúan monoton függvény és $x_0 \in H$ az értelmezési tartománynak egy torlódási pontja. Tegyük fel még, hogy ha x_0 nem a H halmaz legnagyobb vagy legkisebb eleme, akkor kétoldali torlódási pontja is, azaz minden környezete tartalmaz nála kisebb és nagyobb H-beli pontot. Ekkor az f^{-1} függvény folytonos az $y_0 = f(x_0)$ pontban.*

Bizonyítás. Az f^{-1} függvény létezése az f függvény szigorú monotonitásából következik. A „Valós függvények” című tananyagból tudjuk, hogy f^{-1} olyan monotonitású, mint f. Tegyük fel, hogy először, hogy f és így f^{-1} szigorúan monoton növekvő. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges, és jelölje $y_0 := f(x_0)$.

Legyen x_0 a H halmaz kétoldali torlódási pontja. Ekkor találunk két olyan $x_1 < x_0 < x_2$ H-beli elemet, amelyek az x_0 pont ε sugarú környezetében vannak. Mivel f szigorúan monoton növekvő, így $f(x_1) < y_0 < f(x_2)$. Legyen

$$\delta := \min\{y_0 - f(x_1),\ f(x_2) - y_0\} > 0.$$

Az f^{-1} függvény értelmezési tartománya $f(H)$. Ha $y \in f(H)$ és $|y - y_0| < \delta$, akkor $y_0 - \delta < y < y_0 + \delta$, és így a δ értelmezése alapján azt kapjuk, hogy $f(x_1) < y < f(x_2)$. Mivel f^{-1} szintén szigorúan monoton növekvő, ezért $x_1 < f^{-1}(y) < x_2$, azaz

$$-\varepsilon < x_1 - x_0 < f^{-1}(y) - x_0 < x_2 - x_0 < \varepsilon,$$

mert x_1 és x_2 az x_0 pont ε sugarú környezetében vannak. Ezért

$$|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| = |f^{-1}(y) - x_0| < \varepsilon,$$

ami a folytonosság definíciója alapján azt jelenti, hogy f^{-1} folytonos az y_0 pontban.

Legyen x_0 a H halmaz legnagyobb eleme. Feltételeztük, hogy x_0 torlódási pontja H-nak, így van a H halmaznak olyan x_1 eleme, amely az x_0 pont ε sugarú környezetében van, azaz $x_0 - x_1 < \varepsilon$. Legyen $\delta := y_0 - f(x_1)$. Ha $y \in f(H)$ és $|y - y_0| < \delta$, akkor $y_0 - \delta < y < y_0 + \delta$, és így a δ értelmezése alapján azt kapjuk, hogy $f(x_1) < y < y_0$. Mivel f^{-1} szigorúan monoton növekvő, így $x_1 < f^{-1}(y) < x_0$, azaz

$$-\varepsilon < x_1 - x_0 < f^{-1}(y) - x_0 < 0 < \varepsilon,$$

és így

$$|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| = |f^{-1}(y) - x_0| < \varepsilon,$$

ami a definíció alapján azt jelenti, hogy f^{-1} folytonos az y_0 pontban.

A bizonyítás hasonlóan történik, ha x_0 a H halmaz legkisebb eleme, illetve ha f és így f^{-1} szigorúan monoton csökkenő függvények. Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

Meglepő, hogy ez előző tétel nem feltételezi az f függvény folytonosságát az x_0 pontban. Elegendő, hogy az f függvény szigorúan monoton legyen és az x_0 kétoldali (minimum vagy maximum elem esetén jobb- vagy baloldali) torlódási pontja legyen az értékkészletnek.

A tétel előtt megadott két ellenpélda közül az első esetében $x_0 = 2$ nem kétoldali torlódási pontja az értékkészletnek, és az inverz függvény nem is folytonos a hozzátartozó $y_0 = 1$ pontban. A többi pont már teljesíti a tétel feltételeit, ezért ezekben az inverz függvény folytonos. A második ellenpéldában szereplő f függvény nem szigorúan monoton, ennek következtében nem tudjuk alkalmazni a tétel állítását az ő esetében sem.

Az inverz függvény grafikonja az eredeti függvény grafikonjának az $y = x$ egyenesre vett tükörképe, ami folytonosnak látszik, ha az eredeti függvény grafikonja egy folytonos görbéből áll. Nem véletlenül van így, hiszen az intervallum pontjai teljesítik a 6. Tétel feltételeit.

7. Tétel (Inverz függvény folytonossága II.)**.** *Minden intervallumon értelmezett szigorúan monoton függvény inverze folytonos függvény.*

Bizonyítás. Az intervallumok, akár nyílt vagy zárt, akár véges vagy végtelen intervallumokról van szó, olyan halmazok, amelyek minden belső pontja kétoldali torlódási pont és végpontjai egyoldali torlódási pontok. Így a 6. Tétel feltételei teljesülnek az intervallum minden pontjában. Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

Az előző tétel állításának egyik változatát megtaláljuk a 14. Tételben.

Most már rendelkezzünk a szükséges ismeretekkel ahhoz, hogy megvizsgáljuk az elemi függvények folytonosságát, de előtte azt javasoljuk az olvasónak, hogy részletesen tanulmányozza át a „Valós függvények” című tananyagban található „Elemi függvények” című részt. Ott találjuk meg az elemi függvényekkel kapcsolatos fogalmakat és alaptulajdonságokat.

Először a **polinomokkal** kezdjük, azaz azokkal a függvényekkel, amelyek a

$$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \qquad f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

módon írhatók le, ahol n egy nem negatív egész szám, a_k állandó valós számok, ahol $k = 0, \ldots, n$, és még $a_n \neq 0$. Ekkor egy n-ed fokú polinomról beszélünk. Nagyon könnyen igazolható, hogy a

$$g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \qquad g(x) := x$$

első fokú polinom folytonos függvény. Másrészt minden polinom előáll a g függvény egymással vett véges számú összeadása, szorzása és konstans szorosa, ezért a függvényműveletek és folytonosságról szóló 4. Tétel szerint a polinomok folytonos függvények.

A **racionális törtfüggvények** azok a függvények, amelyek felírhatók az

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

képlettel, ahol a_0, $a_1, \ldots$, a_n, illetve b_0, $b_1, \ldots$, b_m valós számok és $a_n \neq 0$ és $b_m \neq 0$. Más szavakkal azok a függvények, amelyek két polinom hányadosaként írhatók fel. Mivel a polinomok folytonos függvények, így a függvényműveletek és folytonosságról szóló 4. Tétel szerint a racionális törtfüggvények is folytonosak a teljes értelmezési tartományunkban, amely a valós számok halmaza, kivéve azokat a pontokat, ahol a nevezőben lévő polinom nullát vesz fel.

Minden n pozitív egész szám esetén az

$$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \qquad f(x) = x^n$$

módon megadott függvény, az ún. **n-edik hatványfüggvény** is folytonos, hiszen egy speciális polinom. Az n-edik hatványfüggvény szigorúan monoton növekvő a $[0, \infty[$ intervallumon, ha n páros, és a $[-\infty, \infty[$ teljes valós számok halmazán, ha n páratlan. Ezért ezeken az intervallumokon vett inverze, az $f(x) = \sqrt[n]{x}$ ún. **n-edik gyökfüggvény** is folytonos a 7. Tétel szerint.

Az előző eredmény egybevág azzal, amit a „Határértékszámítás” című tananyagban tanultunk. Nevezetesen azzal, hogy minden a szám és $a_n \to a$ sorozat esetén $\sqrt[q]{a_n} \to \sqrt[q]{a}$ (ha q páros, akkor $a_n, a \geq 0$). Ezt az eredményt akkor elemi úton igazoltuk. Most ez rögtön következik a gyökfüggvény folytonosságából, hiszen pontosan az átviteli elvet jelenti.

Most az

$$f\colon \mathbf{R} \to]0, \infty[, \qquad f(x) = a^x$$

ún. **a alapú exponenciális függvényen** a sor, ahol $a > 0$, $a \neq 1$ egy valós szám. Legyen először $a > 1$, és vegyük egy fix $x_0 \in \mathbf{R}$ számot. Az exponenciális függvény értelmezése szerint

$$a^{x_0} := \sup\{a^r : r \leq x_0 \text{ és } r \in \mathbf{Q}\}.$$

Mivel két szám között mindig van racionális szám, így van olyan $\langle r_n \rangle$ racionális számokból álló sorozat, hogy $x_0 < r_n < x_0 + \frac{1}{n}$. Az exponenciális függvény szigorúan monoton növekvő, ezért

$$a^{x_0} < a^{r_n} < a^{x_0 + \frac{1}{n}} = a^{x_0} \cdot \underbrace{\sqrt[n]{a}}_{\to 1} \to a^{x_0}.$$

Így a Rendőr-elvből $a^{r_n} \to a^{x_0}$ következik. A monotonitás miatt tudjuk, hogy $a^{x_0} < a^r$ minden $r > x_0$ racionális szám esetén, de az előbbi x_0-nál nagyobb racionális számokból álló $\langle r_n \rangle$ sorozat tart az a^{x_0} számhoz. Ebből következik, hogy

$$a^{x_0} = \inf\{a^r : r \geq x_0 \text{ és } r \in \mathbf{Q}\}.$$

Ezért

$$\sup\{a^r : r \leq x_0 \text{ és } r \in \mathbf{Q}\} = a^{x_0} = \inf\{a^r : r \geq x_0 \text{ és } r \in \mathbf{Q}\}.$$

Ebből következik, hogy minden $\varepsilon > 0$ esetén vannak olyan $r < x_0 < s$ racionális számok, amire
$$a^{x_0} - \varepsilon < a^r < a^{x_0} < a^s < a^{x_0} + \varepsilon.$$

Legyen most $x_n \to x_0$ egy tetszőleges sorozat. Ekkor létezik olyan $n_0 \in \mathbf{N}$, hogy $r < x_n < s$ minden $n > n_0$ esetén. Ekkor a monotonitás miatt

$$a^{x_0} - \varepsilon < a^r < a^{x_n} < a^s < a^{x_0} + \varepsilon,$$

azaz $|a^{x_n} - a^{x_0}| < \varepsilon$. Ebből következik, hogy $a^{x_n} \to a^{x_0}$. Így az átviteli elv miatt az exponenciális függvény folytonos az x_0 pontban, ahol x_0 bármely valós számot jelenthet.

Ha $0 < a < 1$, akkor az exponenciális függvény folytonossága következik az

$$a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$$

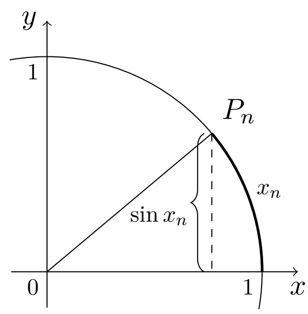
összefüggésből az összetett függvény folytonosságáról szóló 5. Tétel szerint, hiszen $\frac{1}{a} > 1$, és így előáll egy egynél nagyobb alapú exponenciális és az $f(x) = -x$ folytonos függvények kompozíciójaként.

Az exponenciális függvény folytonosságából következik az inverz függvénye, azaz az
$$f^{-1}\colon]0, \infty[\to \mathbf{R}, \qquad f^{-1}(x) = \log_a x$$

a **alapú logaritmus függvény** folytonossága. Tudniillik az exponenciális függvény szigorúan monoton a teljes valós számok halmazán, és így a 7. Tétel feltételei teljesülnek minden x_0 valós szám esetén.

Ezek után a **trigonometrikus függvények** folytonosságának vizsgálata következik. Először igazolni fogjuk, hogy a szinusz függvény folytonos az $x_0 = 0$ pontban.

Legyen $x_n \to 0$ egy pozitív számokból álló sorozat. Ekkor véges sok értéktől eltekintve $0 < x_n < \frac{\pi}{2}$. A szinusz függvény értelmezése miatt az ábrából látható, hogy ebben az esetben $\sin x_n < x_n$. Valóban, $\sin x_n$ a P_n pont és az x tengely távolsága, ami kisebb, mint x_n, hiszen ez P_n és az $(1, 0)$ koordinátájú pontokat összekötő ív hossza. Ezért



$$0 < \sin x_n < x_n \to 0,$$

így a Rendőr-elv szerint $\sin x_n \to 0 = \sin(x_0)$. Ezért az átviteli elv alapján állíthatjuk, hogy a szinusz függvény jobbról folytonos az $x_0 = 0$ pontban.

Mivel a szinusz függvény páratlan, így

$$\sin(-x_n) = -\sin x_n \to 0 = \sin(x_0),$$

ezért balról is folytonos. Tehát a szinusz függvény folytonos az $x_0 = 0$ pontban.

A koszinusz függvény is folytonos az $x_0 = 0$ pontban. Ez a

$$\cos x = 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2} \qquad (x \in \mathbf{R}) \tag{2}$$

azonosságból következik az összetett függvény folytonosságára vonatkozó 5. Tétel alkalmazásával, hiszen már igazoltuk, hogy a szinusz függvény folytonos az $x_0 = 0$ pontban.

Legyen most x_0 egy tetszőleges valós szám és $x_n \to x_0$ egy tetszőleges sorozat. Jelölje $h_n := x_n - x_0$, azaz írjuk fel az $\langle x_n \rangle$ sorozatot az $x_n = x_0 + h_n$ alakban, ahol $h_n \to 0$. Az addíciós tétel és az előbb igazolt szinusz és koszinusz 0 pontbeli folytonossága alkalmazásával

$$\sin x_n = \sin(x_0 + h_n) = \sin x_0 \underbrace{\cos h_n}_{\to 1} + \cos x_0 \underbrace{\sin h_n}_{\to 0} \to \sin x_0,$$

ezért az átviteli elv szerint a szinusz függvény folytonos az x_0 pontban, ami tetszőleges valós szám lehet. A koszinusz függvény folytonossága újból a (2) azonosságból és a szinusz függvény folytonosságából következik, az összetett függvény folytonosságára vonatkozó 5. Tétel alkalmazásával.

A tangens és kotangens függvények is folytonosak minden értelmezési tartománybeli pontjukban, hiszen

$$\operatorname{tg} x := \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \text{és} \qquad \operatorname{ctg} x := \frac{\cos x}{\sin x},$$

azaz két folytonos függvény hányadosaként írhatók le. Ezért alkalmazhatjuk a függvényműveletek és folytonosságról szóló 4. Tételt.

Végül eljutottunk trigonometrikus függvények inverzeire, az ún. **arkusz-függvényekre**. Ezeket úgy kapjuk meg, hogy a trigonometrikus függvényeket egy kitüntetett intervallumon invertáljuk, amely intervallumon az adott trigonometrikus függvény szigorúan monoton. Ezért az inverz függvény folytonosságáról szóló 7. Tétel szerint az arkusz-függvények folytonosak.

4. Intervallumon értelmezett folytonos függvények tulajdonságai

A „Valós függvények” című tananyagban foglalkoztunk a legfontosabb függvénytulajdonságokkal, és vizsgáltuk az egymás közötti kapcsolatukat. A folytonosságról csak most esett szó, ezért ebben a részben folytatni fogjuk a függvénytulajdonságok vizsgálatát úgy, hogy figyelembe vesszük a folytonosságot is, főleg intervallumokon értelmezett függvények esetén.

4.1. Jeltartás és folytonosság

Azt mondjuk, hogy egy f függvény jeltartó olyan x_0 értelmezési tartománybeli pontjában, amire $f(x_0) \neq 0$ teljesül, ha találunk olyan K környezetét, hogy minden $x \in K \cap D_f$ szám esetén $f(x)$ és $f(x_0)$ azonos előjelű. Azaz ha $f(x_0) > 0$, akkor van olyan $r > 0$, hogy minden $x \in]x_0 - r, x_0 + r[$ értelmezési tartománybeli pontra $f(x) > 0$ teljesül. Ugyanígy, ha $f(x_0) < 0$, akkor $f(x) < 0$ teljesül. Vegyük észre, hogy az előbb értelmezett jeltartást nem feltétlenül intervallumokon értelmezett függvényre definiáltuk.

8. Tétel. *Ha egy függvény folytonos olyan pontban, ahol nem nulla értéket vesz fel, akkor ott jeltartó is.*

Bizonyítás. Legyen $H \subseteq \mathbf{R}$, $f\colon H \to \mathbf{R}$, $x_0 \in H$ és $f(x_0) \neq 0$, illetve tegyük fel, hogy f folytonos az x_0 pontban. Legyen $\varepsilon := |f(x_0)|$. A folytonosság definíciója szerint $\exists \delta > 0$, hogy ha

$$|x - x_0| < \delta \text{ és } x \in H, \text{ akkor } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon = |f(x_0)|,$$

azaz

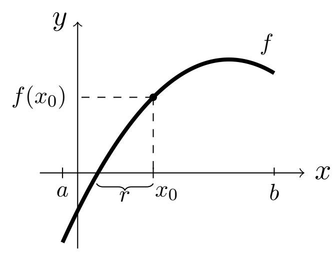
$$-|f(x_0)| < f(x) - f(x_0) < |f(x_0)|,$$

ha $x \in K \cap H$, ahol K az x_0 középpontú δ sugarú környezete. Ekkor

- ha $f(x_0) > 0$, akkor $-f(x_0) < f(x) - f(x_0)$, azaz $f(x) > 0$.
- ha $f(x_0) < 0$, akkor $f(x) - f(x_0) < -f(x_0)$, azaz $f(x) < 0$.

Mindkét esetben $f(x)$ és $f(x_0)$ azonos előjelű.

A jeltartást úgy tudjuk a legjobban szemléltetni, ha veszünk egy $]a, b[$ nyílt intervallumon értelmezett folytonos függvényt. Az ábrán is látható, hogy ha x_0 az intervallum olyan pontja, amire $f(x_0) > 0$ teljesül, akkor x_0 előtt és után, azaz egy $]x_0 - r, x_0 + r[$ intervallumon f pozitív értékeket vesz fel.



4.2. Korlátosság és folytonosság

Nyilván egy folytonos függvény nem feltétlenül korlátos. Erre az

$$f\colon]0,\infty[\to \mathbf{R}, \qquad f(x) := \frac{1}{x}$$

reciprokfüggvény ellenpéldaként szolgál, hiszen a függvény a nulla szám jobb oldalán akármekkora értékeket vehet fel. Azonban ha a függvény értelmezési tartománya egy korlátos és zárt intervallum, akkor mindenképpen korlátosnak kell lennie.

9. Tétel. *Minden korlátos és zárt intervallumon értelmezett folytonos függvény korlátos.*

Bizonyítás. Indirekt módon járunk el. Tegyük fel, hogy $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ és az $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ függvény folytonos az $[a,b]$ intervallum minden pontjában, de felülről nem korlátos. Ekkor minden n természetes számra van olyan x_n intervallumbeli elem, hogy $f(x_n) > n$, azaz

$$y_n := f(x_n) \to \infty.$$

$\langle x_n\rangle$ korlátos sorozat, hiszen elemei az $[a,b]$ intervallumból valók.

A „Számsorozatok és tulajdonságaik” című tananyagban tanultuk a Bolzano–Weierstrass-tétel megfelelőjét sorozatokra. Ez azt mondja ki, hogy minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.

Ezért az $\langle x_n\rangle$ korlátos sorozatnak van konvergens $\langle x'_n\rangle$ részsorozata. Jelölje x_0 ez utóbbi részsorozat határértékét. Ekkor $x_0 \in [a,b]$, hiszen az $[a,b]$ intervallum zárt. Mivel $x'_n \to x_0$ és f folytonos az x_0 pontban, így az átviteli elv szerint

$$y'_n := f(x'_n) \to f(x_0).$$

Azonban $\langle y'_n\rangle$ részsorozata az $\langle y_n\rangle$ részsorozatának, tehát $y'_n \to \infty$, ami ellentmond annak, hogy $y'_n \to f(x_0)$, hiszen $f(x_0)$ nem lehet végtelen. Tehát f felülről korlátos függvény.

Az előzőek szerint minden korlátos és zárt intervallumon értelmezett folytonos függvény felülről korlátos. Tegyük fel most, hogy az $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ függvény folytonos, de alulról nem korlátos. Ekkor minden $x \in [a,b]$ mellett a

$$-f\colon [a,b] \to \mathbf{R}, \qquad (-f)(x) = -f(x),$$

függvény folytonos és nem felülről korlátos. Ez az előzőek szerint nem lehetséges, ezért f alulról korlátos függvény.

Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

4.3. Szélsőértékek és folytonosság

Nem minden korlátos folytonos függvény veszi fel a maximumát és a minimumát, azaz a függvény értékkészletének nem feltétlenül van legnagyobb és legkisebb eleme. Például az

$$f\colon]0,1[\to \mathbf{R}, \qquad f(x) := x$$

függvény szigorúan monoton növekvő. Emiatt a függvény nem veheti fel a maximumát az $x_0 \in]0,1[$ pontban, mert ha $x_0 < x_1 < 1$, akkor $f(x_0) < f(x_1)$, azaz x_0 nem lehet maximumhely. A következő tétel azt mondja ki, hogy korlátos és zárt intervallumon értelmezett folytonos függvények esetén az előző eset nem fordulhat elő.

10. Tétel (Weierstrass-tétel)**.** *Minden korlátos és zárt intervallumon értelmezett folytonos függvény felveszi a maximumát és a minimumát.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ és az $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ függvény folytonos az $[a,b]$ intervallum minden pontjában. Az előző 9. Tétel szerint f értékkészlete korlátos halmaz. Ezért

$$M := \sup\{f(x)\colon x \in [a,b]\} < \infty \quad \text{és} \quad m := \inf\{f(x)\colon x \in [a,b]\} > -\infty,$$

azaz az értékkészlet szuprémuma és infimuma létező valós számok.

Mivel M az értékkészlet szuprémuma, így minden n természetes szám esetén van olyan $x_n \in [a,b]$, hogy

$$M - \frac{1}{n} < f(x_n) \le M$$

teljesül, amiből $y_n := f(x_n) \to M$ következik. $\langle x_n \rangle$ korlátos sorozat, hiszen elemei az $[a,b]$ intervallumból valók. Ekkor a Bolzano–Weierstrass-tétel szerint van konvergens $\langle x_n' \rangle$ részsorozata. Jelölje x_0 ez utóbbi részsorozat határértékét. Ekkor $x_0 \in [a,b]$, hiszen az $[a,b]$ intervallum zárt. Mivel $x_n' \to x_0$ és f folytonos az x_0 pontban, így az átviteli elv szerint

$$y_n' := f(x_n') \to f(x_0).$$

Azonban $\langle y_n' \rangle$ részsorozata az $\langle y_n \rangle$ részsorozatának, tehát $y_n' \to M$, és így $f(x_0) = M$. Ez azt jelenti, hogy az f függvény felveszi az M maximumát az x_0 pontban.

Hasonlóan járunk el a minimum esetében, ha olyan $\langle x_n \rangle$ sorozatot konstruálunk, amire

$$m \le f(x_n) < m + \frac{1}{n}$$

teljesül. Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

4.4. Zérushely és folytonosság

A gyakorlatban gyakran alkalmazzuk azt a mindenki számára nyilvánvalónak tűnő tényt, miszerint egy függvény nem tudja „átugrani” az x tengelyt, ha egy negatív értéket felvevő ponttól egy pozitív értéket felvevő pontig folytonosan halad, vagy ha ugyanezt teszi egy pozitív értéket felvevő ponttól egy negatív értéket felvevő pontig. Ez azt jelenti, hogy ha egy intervallumon értelmezett folytonos függvény két ponton előjelet vált, akkor e két pont között biztosan találunk legalább egy zérushelyet. Ennél általánosabb állítást találunk a következő tételben.

11. Tétel (Bolzano-Darboux-tétel)**.** *Legyen $a < b$ két valós szám, illetve $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ egy folytonos függvény. Ekkor f felvesz minden $f(a)$ és $f(b)$ közé eső értéket.*

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy $f(a) < f(b)$ és c olyan szám, amely a kettő közé esik, azaz

$$f(a) < c < f(b).$$

Értelmezzük a következő függvényt:

$$g(x) := f(x) - c \qquad (x \in [a, b]).$$

Ekkor g folytonos és $g(a) < 0 < g(b)$. A tétel igazolásához elegendő lenne olyan $\xi \in [a, b]$ számot találni, amire $g(\xi) = 0$ teljesül. Erre az intervallum felezési módszert (a Cantor-féle metszet-tételt) fogjuk alkalmazni.

Legyen $x_1 := a$ és $y_1 := b$, azaz $g(x_1) < 0 < g(y_1)$. Vizsgáljuk meg a $g\left(\frac{x_1+y_1}{2}\right)$ értéket.

- Ha $g\left(\frac{x_1+y_1}{2}\right) < 0$, akkor legyen $x_2 := \frac{x_1+y_1}{2}$ és $y_2 := y_1$.
- Ha $g\left(\frac{x_1+y_1}{2}\right) > 0$, akkor legyen $x_2 := x_1$ és $y_2 := \frac{x_1+y_1}{2}$.
- Ha $g\left(\frac{x_1+y_1}{2}\right) = 0$, akkor $\xi = \frac{x_1+y_1}{2}$ már teljesíti a $g(\xi) = 0$ feltétel, és az eljárás véget ért.

Ha az előző lépésben az eljárás nem ért véget, akkor találtunk olyan $x_2 < y_2$ számokat, amire $g(x_2) < 0 < g(y_2)$ teljesül. Vizsgáljuk meg a $g\left(\frac{x_2+y_2}{2}\right)$ értéket.

- Ha $g\left(\frac{x_2+y_2}{2}\right) < 0$, akkor legyen $x_3 := \frac{x_2+y_2}{2}$ és $y_3 := y_2$.
- Ha $g\left(\frac{x_2+y_2}{2}\right) > 0$, akkor legyen $x_3 := x_2$ és $y_3 := \frac{x_2+y_2}{2}$.
- Ha $g\left(\frac{x_2+y_2}{2}\right) = 0$, akkor $\xi = \frac{x_2+y_2}{2}$ már teljesíti a $g(\xi) = 0$ feltétel, és az eljárás véget ért.

Ha az előző lépésben az eljárás nem ért véget, akkor találtunk olyan $x_3 < y_3$ számokat, amire $g(x_3) < 0 < g(y_3)$ teljesül.

Folytassuk tovább az eljárást! Ha találunk olyan $x_n < y_n$ számokat, amire $g(x_n) < 0 < g(y_n)$ teljesül, akkor megvizsgáljuk meg a $g\left(\frac{x_n+y_2}{n}\right)$ értéket.

- Ha $g\left(\frac{x_n+y_n}{2}\right) < 0$, akkor legyen $x_{n+1} := \frac{x_n+y_n}{2}$ és $y_{n+1} := y_n$.
- Ha $g\left(\frac{x_n+y_n}{2}\right) > 0$, akkor legyen $x_{n+1} := x_n$ és $y_{n+1} := \frac{x_n+y_n}{2}$.
- Ha $g\left(\frac{x_n+y_n}{2}\right) = 0$, akkor $\xi = \frac{x_n+y_n}{2}$ már teljesíti a $g(\xi) = 0$ feltétel, és az eljárás véget ért.

Ha az eljárás valamely lépésben megszakad, akkor találtunk olyan $\xi \in [a, b]$ számot, amire $g(\xi) = 0$ teljesül, és így a tétel állítása igaz. Ellenkező esetben két olyan $\langle x_n \rangle$ és $\langle y_n \rangle$ sorozatot kapunk, hogy $x_n < y_n$ minden $n \in \mathbf{N}$ esetén, $\langle x_n \rangle$ monoton növekvő, $\langle y_n \rangle$ monoton csökkenő, és

$$y_n - x_n = \frac{b-a}{2^{n-1}} \to 0.$$

Így az $[x_n, y_n]$ intervallumok teljesítik a Cantor-féle metszet-tétel feltételeit, azaz az $[x_n, y_n]$ intervallumok metszete nem üres. Az $\langle x_n \rangle$ és $\langle y_n \rangle$ sorozatok monotonitásából és korlátosságából következik, hogy mindkettő konvergens, illetve $y_n - x_n \to 0$ miatt a két sorozat határérték megegyezik. Jelölje ξ a közös határértéket. Tudjuk, hogy $\xi \in [x_1, y_1] = [a, b]$. Ekkor

- $x_n \to \xi$ és g folytonos a ξ pontban. Az átviteli elv szerint $g(x_n) \to g(\xi)$, de $g(x_n) < 0$. Ezért $g(\xi) \leq 0$.
- $y_n \to \xi$ és g folytonos a ξ pontban. Az átviteli elv szerint $g(y_n) \to g(\xi)$, de $g(y_n) > 0$. Ezért $g(\xi) \geq 0$.

Ez csak úgy lehetséges, ha $g(\xi) = 0$, és így a tétel állítása igaz.

Az eljárás hasonló módon végezhető el, ha $f(a) > f(b)$. Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

A Bolzano–Darboux-tétel bizonyításában szereplő intervallumfelezési eljárás azért is fontos, mert olyan numerikus módszert biztosít, amivel közelítőleg tudjuk az intervallumokon értelmezett folytonos függvények zérushelyeit megkeresni. Ehhez először két pontot kell találni, ahol a függvény előjelet vált, és ezután addig alkalmazunk az eljárást, amíg a zérushelyet tartalmazó $[x_n, y_n]$ intervallum hossza kisebb lesz, mint egy előre megadott hibakorlát. Ekkor az intervallum bármely értéke megfelelő közelítése lesz a keresett zérushelynek. Az eljárást intervallumfelező módszer néven ismerik.

A 9., 10. és 11. Tételek együttesen adják a korlátos és zárt intervallumon értelmezett folytonos függvények tulajdonságait. Összefoglalva: minden korlátos és zárt intervallumon értelmezett függvény korlátos, felveszi a maximumát, minimumát és minden olyan értéket, ami a kettő között van. Más szavakkal egy korlátos és zárt intervallumon értelmezett folytonos függvény értékkészlete is egy korlátos és zárt intervallum.

A „Valós számok” című tananyagban igazoltuk, hogy minden pozitív számnak létezik n-dik gyöke. Ezt az állítást elemi úton igazoltuk, de a Bolzano–Darboux-tétellel a bizonyítást jelentősen tudjuk lerövidíteni. Valóban, az $f(x) := x^n$ függvény folytonos a $[0, \infty[$ intervallumon. Legyen $a > 0$. Ekkor $f(0) = 0 < a$ és

$$f(a+1) = (a+1)^n \geq a+1 > a.$$

Tehát $f(0) < a < f(a+1)$. Így a Bolzano–Darboux-tétel szerint létezik olyan $0 < \xi < a+1$ szám, amire $f(\xi) = a$ teljesül, azaz $\xi^n = a$, ami azt jelenti, hogy az a szám n-dik gyöke a ξ szám.

4.5. Monotonitás és folytonosság

Nyilvánvaló, hogy egy monoton függvény nem feltétlenül folytonos. Azonban egy intervallumon értelmezett folytonos függvény nagyon sok helyen folytonosnak kell lennie. Pontosabban, a szakadási helyeinek halmaza, azaz azon pontok halmaza, ahol a függvény értelmezett, de nem folytonos, megszámlálható halmaz.

12. Tétel. *Legyen f egy intervallumon értelmezett monoton függvény. Ekkor f szakadási helyeinek halmaza megszámlálható.*

Bizonyítás. Legyen I egy intervallum, ami lehet véges vagy végtelen intervallum, illetve nyílt, zárt, vagy egyik sem. Tegyük fel, hogy $f\colon I \to \mathbf{R}$ egy monoton növekvő függvény és legyen x_0 az I intervallum egy belső pontja. Jelölje

$$A := \{f(x)\colon x \in I,\ x < x_0\} \qquad \text{és} \qquad B := \{f(x)\colon x \in I,\ x > x_0\}.$$

Az f monotonitása miatt állíthatjuk, hogy $f(x_0)$ felső korlátja az A halmaznak, és alsó korlátja a B halmaznak. Ezért $\alpha := \sup A$ és $\beta := \inf B$ két olyan valós szám, amire

$$\alpha \leq f(x_0) \leq \beta$$

teljesül. Igazolni fogjuk, hogy ha $\alpha = f(x_0)$, akkor f balról folytonos az x_0 pontban. Valóban, ha $f(x_0)$ az A halmaz szuprémuma, akkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén $f(x_0) - \varepsilon$ nem felső korlátja az A halmaznak. Ekkor van olyan $\xi \in I$, $\xi < x_0$ szám, hogy

$$f(x_0) - \varepsilon < f(\xi) \leq f(x_0)$$

teljesül. Továbbá minden $x_n \to x_0$ I-beli sorozat esetén van olyan $n_0 \in \mathbf{N}$ index, hogy $\xi < x_n < x_0$, ha $n > n_0$. Ekkor a monotonitás miatt

$$f(x_0) - \varepsilon < f(\xi) \leq f(x_n) \leq f(x_0),$$

azaz $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$, ha $n > n_0$. Így a határérték fogalma szerint $f(x_n) \to f(x_0)$. Ezért az átviteli elv alapján mondhatjuk, hogy f balról folytonos az x_0 pontban. Hasonló módon igazolható, hogy ha $\beta = f(x_0)$, akkor f jobbról folytonos az x_0 pontban.

Az előző okfejtésből következik, hogy ha f nem folytonos az x_0 pontban, akkor $\alpha < f(x_0)$ vagy $\beta > f(x_0)$, azaz $\alpha \neq \beta$. Rendeljünk az x_0 ponthoz egy, az $]\alpha, \beta[$ intervallumba eső racionális számot. Mivel az előzőek szerint minden belső szakadási helyhez rendelhetünk egy racionális számot, így a belső szakadási helyek halmaza ekvivalens a racionális számok egyik részhalmazával, azaz véges vagy megszámlálhatóan végtelen halmaz.

Egy intervallumnak legfeljebb két határpontja lehet, ezért ha valamelyik a függvény szakadási helye, akkor ez érdemben nem befolyásolja a szakadási helyek számosságát. Ehhez a tétel állítását igazoltuk.

Egy folytonos függvény sem feltétlenül monoton. Például az

$$f :]-1, 1[\to \mathbf{R}, \qquad f(x) := x^2$$

függvény folytonos, de nem monoton. A függvény a $]-1, 0[$ intervallumon szigorúan monoton csökkenő, azonban az $x = 0$ után növekedni kezd, és így újra felveszi az $x = 0$ előtt felvett értékeket, ezért nem egy-egyértelmű. Ez nem véletlen, hiszen igaz a következő állítás.

13. Tétel. *Minden intervallumon értelmezett folytonos egy-egyértelmű függvény szigorúan monoton.*

Bizonyítás. Indirekt módon tegyük fel, hogy az f függvény nem monoton, és értelmezési tartománya az I intervallum. Ekkor találunk három olyan $x < y < z$ I-beli elemet, hogy $f(x) < f(y)$ és $f(z) < f(y)$, vagy $f(x) > f(y)$ és $f(z) > f(y)$. A első esetben van olyan $\lambda \in \mathbf{R}$, hogy

$$f(x) < \lambda < f(y), \quad \text{és} \quad f(z) < \lambda < f(y).$$

Ekkor a Bolzano–Darboux-tétel szerint létezik egy $x < \xi_1 < y$ és $y < \xi_2 < z$, hogy $f(\xi_1) = f(\xi_2) = \lambda$, de ez ellentmond a függvény egy-egyértelműségének. A második esetben is hasonlóan járhatunk el. Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

Az előző tételnek van egy közvetlen alkalmazása. A 7. Tételben azt állítottuk, hogy minden intervallumon értelmezett szigorúan monoton függvény inverze folytonos függvény, és ehhez nem szükséges feltételezni az eredeti függvény folytonosságát. Ha mégis tudjuk, hogy folytonos egy-egyértelmű függvényről van szó, akkor a monotonitást nem szükséges feltételeznünk, hiszen az előző tétel szerint már a folytonosságból és azaz az invertálhatóságból (az egy-egyértelműségből) következik a szigorú monotonitás.

14. Tétel (Inverz függvény folytonossága III.)**.** *Minden intervallumon értelmezett invertálható és folytonos függvény inverze is folytonos függvény.*

4.6. Konvexitás és folytonosság

A „Valós függvények” című tananyagban részletesen foglalkoztunk a függvény konvexitásával. Ott azt tanultunk, hogy egy f valós függvény konvex egy értelmezési tartományában lévő I nyílt intervallumon, ha minden $x, y \in I$, $x \neq y$ és $0 < \lambda < 1$ szám esetén igaz, hogy

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Ha ezzel szemben minden $x, y \in I$, $x \neq y$ és $0 < \lambda < 1$ szám esetén igaz, hogy

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y),$$

akkor konkáv.

15. Tétel (Konvex függvény folytonossága)**.** *Minden nyílt intervallumon értelmezett, és a teljes intervallumon konvex (konkáv) függvény folytonos.*

Bizonyítás. Legyen I egy nyílt intervallum és $f\colon I \to \mathbf{R}$ egy olyan függvény, amely konvex az I intervallumon. Legyen $x_0 \in I$ az intervallum tetszőleges pontja, és $x_n \to x_0$ egy olyan I-beli sorozat, amire $x_n < x_0$ teljesül minden $n \in \mathbf{N}$ esetén. Rögzítsük az x_0 pont két oldalán két $x, y \in I$ pontot úgy, hogy

$$x < x_n < x_0 < y$$

teljesüljön minden $n \in \mathbf{N}$ esetén. Legyen

$$\lambda_n := \frac{x_0 - x_n}{x_0 - x} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor $x_n = \lambda_n x + (1-\lambda_n)x_0$, $0 < \lambda_n < 1$ és $\lambda_n \to 0$, hiszen $x_n \to x_0$. A konvexitás miatt

$$f(x_n) = f(\lambda_n x + (1-\lambda_n)x_0) \leq \lambda_n f(x) + (1-\lambda_n) f(x_0) \to f(x_0),$$

hiszen $\lambda_n \to 0$. Legyen most

$$\delta_n := \frac{y - x_0}{y - x_n} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor $x_0 = \delta_n x_n + (1-\delta_n)y$, $0 < \delta_n < 1$ és $\delta_n \to 1$, hiszen $x_n \to x_0$. A konvexitás miatt

$$f(x_0) = f(\delta_n x_n + (1-\delta_n)y) \leq \delta_n f(x_n) + (1-\delta_n) f(y),$$

azaz

$$f(x_n) \geq \frac{f(x_0) - (1-\delta_n)f(y)}{\delta_n} \to f(x_0),$$

hiszen $\delta_n \to 1$. A fentiek szerint az $f(x_n)$ sorozatot felülről és alulról becsülhető két olyan sorozattal, amely $f(x_0)$-hoz tart. Ekkor a Rendőr-elv szerint $f(x_n) \to f(x_0)$, amiből az átviteli elv szerint következik, hogy f balról folytonos az x_0 pontban.

Hasonlóan járhatunk el, ha $x_n \to x_0$ egy olyan I-beli sorozat, amire $x_n > x_0$ teljesül minden $n \in \mathbf{N}$ esetén. Konkáv függvény esetén elegendő a fenti bizonyításban szereplő relációjeleket megfordítani. Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

A konvexitás mellett egy ún. gyengén konvexitásról is szó esett a „Valós függvények" című tananyagban. Fogalma a következő: az f függvény gyengén konvex az I nyílt intervallumon, ha minden $x, y \in I$, $x \neq y$ szám esetén igaz, hogy

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

Fordított egyenlőtlenség esetén gyengén konkáv függvényről beszélhetünk. Látható, hogy a gyengén konvexitás csak $\lambda = \frac{1}{2}$ esetén követeli meg a konvexitásnál szereplő egyenlőtlenséget. Ezért a teljesülését könnyebb ellenőrizni. Azonban a gyengén konvexitás nincs annyira „messze" a rendes konvexitástól. A „Valós függvények" című tananyagban igazoltuk, hogy monoton függvények esetén a két fogalom egybeesik (9. Tétel). A következő állítás hasonlót állít folytonos függvényekre.

16. Tétel. *Legyen f egy valós függvény, amely folytonos az I nyílt intervallumon. Ha f (szigorúan) gyengén konvex függvény az I intervallumon, akkor ott szintén (szigorúan) konvex függvény. Ugyanúgy, ha f (szigorúan) gyengén konkáv függvény az I intervallumon, akkor ott szintén (szigorúan) konkáv függvény.*

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy f gyengén konvex az I intervallumon. A „Valós függvények" című tananyagban szereplő 9. Tétel bizonyításában azt igazoltuk, hogy ekkor minden $x, y \in I$, $x \neq y$ szám és $0 < r < 1$ racionális szám esetén

$$f(rx + (1-r)y) \leq rf(x) + (1-r)f(y) \tag{3}$$

teljesül. Legyen $0 < \lambda < 1$ tetszőleges valós szám, valamint $\langle r_n \rangle$ egy olyan racionális számokból álló sorozat, amire $0 < r_n < 1$ és $r_n \to \lambda$ teljesül. (3) miatt

$$f(r_n x + (1-r_n)y) \leq r_n f(x) + (1-r_n)f(y)$$

teljesül minden $n \in \mathbf{N}$ esetén. A határátmenet megtartja a kisebb vagy egyenlő relációt. A baloldal az $f(\lambda x + (1-\lambda)y)$ értékhez tart, hiszen

$$r_n x + (1-r_n)y \to \lambda x + (1-\lambda)y,$$

és ha f folytonos, akkor az átviteli elv szerint

$$f(r_n x + (1-r_n)y) \to f(\lambda x + (1-\lambda)y).$$

A jobboldal nyilván $\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$ értékhez tart. Ezért

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y),$$

ami azt jelenti, hogy f konvex az I intervallumon.

Ha f szigorúan gyengén konvex függvény az I intervallumon, akkor az előbbi okfejtés szerint f konvex az I intervallumon. A konvexitás azért lesz szigorú, mert ellenkező esetben lenne az I intervallumnak olyan részintervalluma, ahol f lineáris függvény, és így f nem lehet szigorúan gyengén konvex (lásd az A „Valós függvények" című tananyagot).

A bizonyítás hasonlóan történik (szigorúan) gyengén konkáv függvények esetén. Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

5. Egyenletes folytonosság

Nézzük át újra a pontbeli folytonosság definícióját! Azt mondtuk, hogy az f függvény az x_0 értelmezési tartománybeli pontjában folytonos, ha minden ε pozitív számhoz találunk egy δ pozitív számot, hogy minden értelmezési tartománybeli pontra, ami az x_0 pont δ sugarú környezetében van, az teljesül, hogy a pont f szerinti képe az $f(x_0)$ pont ε sugarú környezetébe esik.

Világos, hogy δ az ε megválasztásától függ, de az x_0 ponttól is függhet. Ezt jól illusztrálja a következő példa.

Tekintsük az

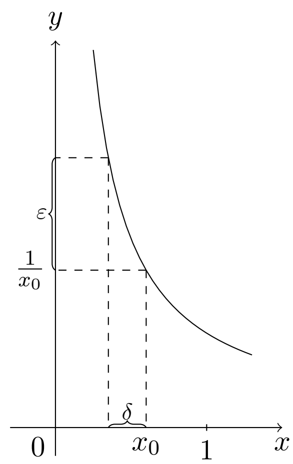
$$f\colon]0,\infty[\to \mathbf{R}, \qquad f(x)=\frac{1}{x}$$

folytonos függvényt. Legyen $x_0 \in]0,1[$ egy tetszőleges pontja és $\varepsilon>0$. Az ábrából láthatjuk, hogy a legnagyobb δ értékre, ami szóba jöhet, az teljesül, hogy

$$\frac{1}{x_0}+\varepsilon=\frac{1}{x_0-\delta},$$

azaz

$$\delta=\frac{\varepsilon x_0^2}{1+\varepsilon x_0}.$$



A fenti összefüggésnél nem nehéz igazolni, hogy fix ε érték mellett a δ értéke monoton csökkenően tart nullához, ha x_0 nullához tart. Ez azt jelenti, hogy minél közelebb van az x_0 pont a nullához, annál kisebb δ értéket vehetünk, és nincs legkisebb pozitív δ, ami minden x_0 pontnak felelne meg. Más lenne a helyzet, ha a nulla valamennyivel távolabb esne a függvény értelmezési tartományától. Például az

$$f\colon]1,\infty[\to \mathbf{R}, \qquad f(x)=\frac{1}{x}$$

függvénynél fix ε érték mellett már találunk legkisebb pozitív δ értéket, hiszen most $x_0>1$, és így a monoton csökkenés miatt

$$\delta=\frac{\varepsilon x_0^2}{1+\varepsilon x_0}>\frac{\varepsilon\cdot 1^2}{1+\varepsilon\cdot 1}=\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}.$$

Ebben a részben olyan függvények kerülnek a középpontba, amelyre ez utóbbi jelenség teljesül.

4. Definíció. *Legyen $H\subseteq\mathbf{R}$ és $A\subseteq H$. Azt mondjuk, hogy az $f\colon H\to\mathbf{R}$ függvény* ***egyenletesen folytonos az A halmazon****, ha $\forall\varepsilon>0$-hoz $\exists\delta>0$, hogy ha*

$$|x-y|<\delta \text{ és } x,y\in A, \text{ akkor } |f(x)-f(y)|<\varepsilon.$$

Ha csak azt mondjuk, hogy f egyenletesen folytonos, akkor ezt az egész értelmezési tartományán értjük.

Az eddig elmondottak alapján az $f(x) = \frac{1}{x}$ egyenletesen folytonos az $]1, \infty[$ intervallumon, de nem egyenletesen folytonos a $]0, \infty[$ intervallumon. Fontos megjegyezni, hogy az egyenletesen folytonosság nem pontbeli tulajdonság, hanem egy teljes halmazra vonatkozik, azonban erősebb, mint a halmazon vett folytonosság.

17. Tétel. *Ha egy függvény egyenletesen folytonos egy halmazon, akkor ott folytonos is.*

Bizonyítás. Ha f egyenletesen folytonos az A halmazon és rögzítünk egy $x_0 \in A$ tetszőleges pontját, akkor az egyenletesen folytonosság definíciója az $y := x_0$ helyettesítés mellett pontosan az f függvény folytonosságát adja az x_0 pontban.

A tétel megfordítása nem igaz, hiszen láttuk, hogy a $]0, \infty[$ intervallumon értelmezett $f(x) = \frac{1}{x}$ folytonos függvény nem egyenletesen folytonos. Mi lehet ennek az oka? Talán az, hogy a függvény akármekkora értékeket vehet fel a nulla közelében, pontosabban a függvény nem korlátos a nulla bármely jobboldali környezetében. Az ilyen függvények nem lehetnek egyenletesen folytonosak.

18. Tétel. *Ha egy függvény egyenletesen folytonos egy korlátos halmazon, akkor a függvény korlátos ezen a halmazon.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy f egyenletesen folytonos a korlátos A halmazon. Ha az egyenletes folytonosság definícióját alkalmazzuk $\varepsilon := 1$ mellett, akkor van olyan $\exists\delta > 0$, hogy ha

$$|x - y| < \delta \text{ és } x, y \in A, \text{ akkor } |f(x) - f(y)| < 1.$$

A korlátos halmaz, ezért van olyan $[a, b]$ véges intervallum, hogy $A \subseteq [a, b]$. Mivel az intervallum hossza megnövelhető, így feltételezhető, hogy ez δ többszöröse, azaz $b = a + n\delta$, ahol n egy pozitív egész szám. Jelölje

$$A_k := A \cap [a + (k - 1)\delta, a + k\delta] \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Ekkor

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k.$$

Adott k érték mellett ha az A_k halmaz nem üres és x_k-val jelöljük az egyik elemét, akkor bármely $x \in A_k$ esetén igaz, hogy $|x - x_k| < \delta$. Ennek következtében $|f(x) - f(x_k)| < 1$, azaz

$$f(x_k) - 1 < f(x) < f(x_k) + 1.$$

Ezért az f függvény korlátos az A_k halmazon minden $k = 1, 2, \ldots, n$ esetén. Mivel A előáll véges sok ilyen halmaz uniójaként, így az f függvény is korlátos az A halmazon. Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

Fontos megjegyezni, hogy az A halmaz korlátossága lényeges feltétel, ellenkező esetben előfordul, hogy a függvény nem lesz korlátos az A halmazon. Például könnyű igazolni, hogy az

$$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \qquad f(x) = x$$

függvény egyenletesen folytonos, de nem korlátos.

Nyilvánvaló tény, hogy ha egy függvény egyenletesen folytonos egy halmazon, akkor ennek bármely részhalmazán is az. Ezért ha egy halmaznak van olyan korlátos részhalmaza, ahol a függvény nem korlátos, akkor a függvény nem lehet egyenletesen folytonos ezen a halmazon.

A 18. Tétel megfordítása nem igaz, azaz van olyan korlátos halmazon értelmezett korlátos függvény, amely nem egyenletesen folytonos. Mielőtt erre rátérünk, fejezzük ki az egyenletes folytonosság fogalmát sorozatok segítségével ahhoz hasonlóan, ahogy a pontbeli folytonosságot az árviteli elvvel ki tudtunk fejezni.

19. Tétel. *Legyen $H \subseteq \mathbf{R}$ és $A \subseteq H$. Az $f\colon H \to \mathbf{R}$ függvény akkor is csak akkor egyenletesen folytonos az A halmazon, ha minden $\langle x_n \rangle$ és $\langle y_n \rangle$ A-beli sorozatok esetén, amikre $x_n - y_n \to 0$ teljesül igaz, hogy $f(x_n) - f(y_n) \to 0$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az f függvény egyenletesen folytonos az A halmazon. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Az egyenletes folytonosság definíciója szerint $\exists \delta > 0$, hogy ha

$$|x - y| < \delta \text{ és } x, y \in A, \text{ akkor } |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Legyen $\langle x_n \rangle$ és $\langle y_n \rangle$ két olyan A-beli sorozat, amire $x_n - y_n \to 0$ teljesül. Ekkor $\exists n_0 \in \mathbf{N}$, hogy ha $n > n_0$, akkor $|x_n - y_n| < \delta$. Így az előbbiek szerint $|f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon$. Ez pontosan azt jelenti, hogy $f(x_n) - f(y_n) \to 0$.

Másrészt tegyük fel, hogy az f függvény nem egyenletesen folytonos az A halmazon. Ekkor $\exists \varepsilon > 0$, hogy $\forall \delta > 0$-hoz találunk olyan $x, y \in A$ számot, amire

$$|x - y| < \delta \quad \text{és} \quad |f(x) - f(y)| > \varepsilon$$

teljesül. Legyen $\delta = \frac{1}{n}$ minden $n \in \mathbf{N}$ esetén, és minden ilyen δ-hoz válasszunk két olyan x_n és y_n A-beli értéket, amire a fenti két egyenlőtlenség teljesül. Így két olyan sorozatot találtunk, ami A-beli elemekből áll,

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad \text{és} \quad |f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$$

teljesül. Az első egyenlőtlenség miatt $x_n - y_n \to 0$, de a második egyenlőtlenség miatt $f(x_n) - f(y_n) \not\to 0$.

Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

Az előző tétel segítségével tudjuk igazolni, hogy az

$$f\colon \left]0, \frac{1}{2\pi}\right] \to \mathbf{R}, \qquad f(x) = \sin\frac{1}{x}$$

függvény nem egyenletesen folytonos. Valóban, ha

$$x_n := \frac{1}{2\pi n} \qquad \text{és} \qquad y_n := \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}},$$

akkor

$$x_n - y_n = \frac{1}{2\pi n} - \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4n(2\pi n + \frac{\pi}{2})} \to 0,$$

de $f(x_n) = 0$ és $f(y_n) = 1$, azaz $f(x_n) - f(y_n) \not\to 0$. Így a 19. Tétel szerint a függvény nem egyenletesen folytonos, pedig az összetett függvény folytonosságáról szóló 5. Tétel értelmében folytonos a $\left]0, \frac{1}{2\pi}\right]$ korlátos halmazon. A példa mutatja, hogy a 18. Tétel nem fordítható meg.

Ha már a korlátosság nem elegendő, akkor keresnünk kell más feltételeket, amik garantálják az egyenletes konvergenciát. A 19. Tétel alapján olyan tulajdonságot érdemes keresni, ami biztosítja, hogy ha $x_n - y_n \to 0$, akkor $f(x_n) - f(y_n) \to 0$. Ilyen lehet az, ha létezik olyan $L > 0$ azám, hogy minden $x, y \in A$ esetén

$$|f(x) - f(y)| \le L|x - y|$$

teljesül. Ekkor azt mondjuk, hogy a függvény kielégíti a **Lipschitz-féle feltételt** az A halmazon. Ha ez a feltétel teljesül és $x_n - y_n \to 0$, akkor

$$0 \le |f(x_n) - f(y_n)| \le L|x_n - y_n| \to 0,$$

amiből következik, hogy $f(x_n) - f(y_n) \to 0$. Ezért ha egy függvény kielégíti a Lipschitz-féle feltételt egy halmazon, akkor egyenletesen folytonos ezen a halmazon.

Másrészt tudjuk, hogy az

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

hányados nem más, mint az $(x, f(x))$ és $(y, f(y))$ pontokon átmenő egyenes meredeksége. Ezért a Lipschitz-féle feltétel geometriai jelentése az, hogy az A halmazhoz tartozó függvény grafikonjának két tetszőleges pontján átmenő egyenes meredeksége nem lehet akármilyen nagy, csak a $-L$ és L értékek között mozog.

Nem minden egyenletesen folytonos függvény elégíti ki a Lipschitz-féle feltételt. Ilyen például az

$$f\colon [0, 1] \to \mathbf{R}, \qquad f(x) = \sqrt{x}$$

függvény, hiszen ha $0 < x \le 1$ és $y = 0$, akkor az

$$\left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

hányados nem korlátos minden $0 < x \le 1$ esetén. De miért egyenletesen folytonos folytonos az előző függvény? A választ a következő tétel adja.

20. Tétel (Heine-tétel)**.** *Minden korlátos és zárt intervallumon értelmezett folytonos függvény egyenletesen folytonos is.*

Bizonyítás. Indirekt módon járunk el. Tegyük fel, hogy $a, b \in \mathbf{R}$ és az $f\colon [a, b] \to \mathbf{R}$ függvény folytonos az $[a, b]$ intervallum minden pontjában, de nem egyenletesen folytonos. Ekkor a 19. Tétel szerint van két olyan $\langle x_n \rangle$ és $\langle y_n \rangle$ sorozat, amelyre igaz, hogy $x_n, y_n \in [a, b]$ minden $n \in \mathbf{N}$ esetén,

$$x_n - y_n \to 0, \qquad \text{de} \qquad f(x_n) - f(y_n) \not\to 0.$$

$\langle x_n \rangle$ korlátos sorozat, hiszen elemei az $[a, b]$ intervallumból valók. A Bolzano–Weierstrass-tétel szerint minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata, így az $\langle x_n \rangle$ sorozatnak is van. Legyen tehát $\langle x'_n \rangle$ egyik konvergens részsorozata. Mivel $[a, b]$ zárt, így $\langle x'_n \rangle$ határértéke az $[a, b]$ intervallum eleme. Ezért ha x_0-val jelöljük az $\langle x'_n \rangle$ határértékét, akkor $x_0 \in [a, b]$.

Nézzük meg, hogy az $\langle x'_n \rangle$ részsorozat az $\langle x_n \rangle$ sorozat melyik elemeiből épül fel. Ehhez tekintsük azt a szigorúan monoton növekvő φ leképezés, amellyel a kiválogatás történik, azaz

$$x'_n = x_{\varphi(n)} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Ugyanazzal a szabállyal válogassuk ki az $\langle y_n \rangle$ sorozatból egy $\langle y'_n \rangle$ részsorozatot, azaz

$$y'_n := y_{\varphi(n)} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor $\langle x'_n - y'_n \rangle$ részsorozata az $\langle x_n - y_n \rangle$ sorozatnak, ezért szintén tart a nullához. Így

$$y'_n = (y'_n - x'_n) + x'_n \to 0 + x_0 = x_0,$$

azaz $\langle y'_n \rangle$ is x_0-hoz tart. Azonban az f függvény folytonos az $[a, b]$ intervallum minden pontjában, és így az x_0 pontban is. Ezért

$$f(x'_n) \to f(x_0) \qquad \text{és} \qquad f(y'_n) \to f(x_0),$$

hiszen az átviteli elv szerint minden x_0-hoz tartó sorozat képsorozata $f(x_0)$-hoz tart. Tehát $f(x_n) - f(y_n) \to 0$, ami ellentmond a feltételezésünknek. Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

A Heine-tétel segítségével nem nehéz további példákat adni egyenletesen folytonos függvényekről, hiszen a benne szereplő feltételek teljesülése sok esetben könnyen igazolható. Például az

$$f\colon [0, 1] \to \mathbf{R}, \qquad f(x) = \sqrt{x}$$

függvényről tudjuk, hogy folytonos. Mivel értelmezési tartománya egy korlátos és zárt intervallum, így a Heine-tétel alapján egyenletesen folytonos.

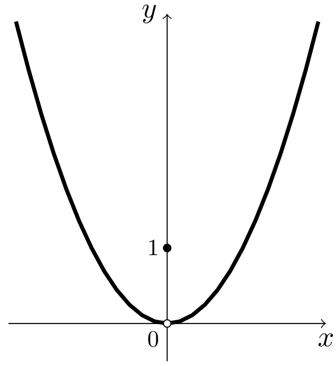
Az egyenletes folytonosság egy nagyon hasznos tulajdonság, ezért többször visszatér majd későbbi tanulmányainkban.

6. A függvény pontbeli határértéke

A függvény folytonosságát a függvény egyes értelmezési tartománybeli pontjaiban értelmeztük. A folytonosság függ a függvény veselkedésétől nem csak kizárólag a pontban, hanem annak egy kis sugarú környezetében is. Ha a pont nem izolált, azaz minden környezete tartalmaz tőle különböző értelmezési tartománybeli pontot, akkor érdemes külön megvizsgálni a függvény viselkedését a ponthoz közeli helyeken. Előfordulhat, hogy ez a viselkedés megfelel a folytonosság által elvárt követelményeknek, de gond van a pontban felvett értékével.

Lássuk egy példát! Az

$$f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} x^2 & \text{ha } x\neq 0,\\ 1 & \text{ha } x=0,\end{cases}$$



függvény nem folytonos az $x_0=0$ pontban, azonban csak annyival tér el a folytonos

$$g\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}, \qquad g(x) := x^2$$

másodfokú függvénytől, hogy ebben pontban más értéket vesz fel. Ezért az x_0 pont környezete olyan tulajdonságokkal bír, hogy a megfelelő $f(x_0)$ érték megválasztásával a függvény folytonos lehet az x_0 pontban. A példában ez az érték a g függvény értéke az x_0 pontban, ami nullával egyenlő. Ez lesz az f függvény határértéke az x_0 pontban.

5. Definíció. *Legyen $H\subseteq\mathbf{R}$ és x_0 torlódási pontja H-nak. Azt mondjuk, hogy az $f\colon H\to\mathbf{R}$ valós függvénynek létezik határértéke az x_0 pontban és ez A-val egyenlő, ha $\forall\varepsilon>0$-hoz $\exists\delta>0$, hogy ha*

$$0<|x-x_0|<\delta \text{ és } x\in H, \text{ akkor } |f(x)-A|<\varepsilon.$$

Ekkor a $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ jelölést alkalmazzuk.

Ha létezik, akkor a függvény pontbeli határértéke egyértelmű, hiszen két A és B határérték esetén bármely $\varepsilon>0$ számhoz lenne legalább olyan x értelmezési tartománybeli pont, amire egyidejűleg

$$|f(x)-A|<\varepsilon \qquad \text{és} \qquad |f(x)-B|<\varepsilon$$

teljesülne. Ekkor

$$|A-B|\leq |f(x)-A|+|f(x)-B|<2\varepsilon,$$

ami csak akkor lehetséges, ha $A=B$.

Nem meglepő, hogy nagy a hasonlóság a függvény pontbeli folytonossága (lásd az 1. Definíciót) és az előbb értelmezett függvény pontbeli határértéke között, hiszen éppen azt az A értéket kerestünk, amivel $f(x_0) = A$ esetén az f függvény folytonos lesz az x_0 pontban. Azonban két szembetűnő különbség látható. A függvény határértékének definíciója nem követeli meg, hogy az x_0 pont eleme legyen a függvény értelmezési tartományának, ami a pontbeli folytonosság egyik feltétele. Viszont megköveteli, hogy x_0 torlódási pontja legyen a függvény értelmezési tartományának, azaz ne legyen izolált pontja, pedig tudjuk, hogy minden függvény folytonos az izolált pontjaiban. Az előző két eset elkerülésével már érvényes a következő állítás.

21. Tétel. *Legyen $H \subseteq \mathbf{R}$ és $x_0 \in H$ torlódási pontja H-nak. Ekkor az $f\colon H \to \mathbf{R}$ valós függvény akkor és csak akkor folytonos az x_0 pontban, ha ott létezik a függvénynek határértéke és*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Bizonyítás. Az állítás azonnal következik a pontbeli folytonosság és a pontbeli határérték fogalmák összehasonlításából $f(x_0) = A$ esetén.

Az előző tétel a pontbeli határértékszámítás alapkoncepcióját adja, miszerint ha a keresett kifejezés folytonos a pontban, akkor elegendő a pontot behelyettesíteni a kifejezésbe. Például

$$\lim_{x \to 0} e^{x^2+x} = e^{0^2+0} = e^0 = 1,$$

hiszen a $g(x) = x^2 + x$ polinom és $f(x) = e^x$ exponenciális függvény folytonos függvények, ezért az $f(g(x)) = e^{x^2+x}$ összetett függvény is folytonos.

Előfordul, hogy a határértékben lévő kifejezést először át kell alakítani. Például

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x^2 + x - 3}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(2x+3)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{2x+3}{x+1} = \frac{2 \cdot 1 + 3}{1+1} = \frac{5}{2}.$$

Az előző példában szereplő

$$f(x) := \frac{2x^2 + x - 3}{x^2 - 1}$$

racionális törtfüggvény folytonos minden értelmezési tartománybeli pontjában, de az $x = 1$ helyen nem értelmezhető, így nem tudtunk behelyettesíteni. Azonban a függvényt az

$$f(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x^2 - 1} = \frac{2x+3}{x+1} \qquad (x \neq 1)$$

módon alakítottunk át. Az átalakítás ekvivalens, ha $x \neq 1$, ami megfelel a céljainknak, hiszen a pontbeli határérték kiszámításához egy, a pontot nem tartalmazó környezetben kell vizsgálni a függvényt, és nem magában a pontban. Az átalakítás után kapott kifejezés már folytonos az $x = 1$ pontban, így a végeredményhez elegendő ezt az értéket behelyettesíteni az új kifejezésbe.

2. Feladat. *Határozzuk meg a következõ határértékeket!*

a) $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{3x^5+2x^2+x}{x^2+2x}$, *b)* $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{3x^5+2x^2+x}{x^2+2x}$,

c) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^6+3x^5-2x^2-x-1}{x^3-1}$, *d)* $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$,

e) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}$, *f)* $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{3-\sqrt{x+7}}{x^2-4}$.

Megoldás:

a) $\boxed{\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{3x^5+2x^2+x}{x^2+2x}}$

A folytonosság miatt rögtön be tudjuk helyettesíteni az $x=-1$ értéket.

$$\lim_{x\to-1} \frac{3x^5+2x^2+x}{x^2+2x} = \frac{3(-1)^5+2(-1)^2-1}{(-1)^2-2} = 2$$

b) $\boxed{\lim\limits_{x\to0} \dfrac{3x^5+2x^2+x}{x^2+2x}}$

Átalakítás után egy kifejezést kapunk, ami az $x=0$ pontban folytonos. Ebbe behelyettesítjük az $x=0$ értéket.

$$\lim_{x\to0} \frac{3x^5+2x^2+x}{x^2+2x} = \lim_{x\to0} \frac{x(3x^4+2x+1)}{x(x+2)} = \lim_{x\to0} \frac{3x^4+2x+1}{x+2} = \frac{1}{2}$$

c) $\boxed{\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^6+3x^5-2x^2-x-1}{x^3-1}}$

Alkalmazzuk a polinomokról tanultakat (lásd a „Valós függvények” című tananyagot)! Ha x_0 gyöke egy polinomnak, akkor a polinom osztható az $x-x_0$ elsőfokú polinommal, és így fel tudjuk bontani két polinom szorzatára, ahol az egyik szorzótényező $x-x_0$, és a másik tényező polinomosztással vagy Horner-féle elrendezéssel határozható meg. Mi most a számlálónál a Horner-féle elrendezést alkalmazzuk az átalakításhoz:

	1	3	0	0	-2	-1	-1
1	1	4	4	4	2	1	0

A Horner-féle elrendezéssel úgy dolgozunk, hogy egy táblázat felső sorában az osztandó polinom együtthatói szerepeltetjük, a második sorban a függőleges vonal előtti elem a zérushely (ez itt 1), a vonal utáni első elem megegyezik a felette levő elemmel (ez itt is 1) és utána úgy kapjuk sorban az elemeket, hogy a megelőző elemet megszorozzuk a zérushellyel és hozzáadjuk a felette levő elemet, azaz

$$1\cdot1+3=4,\ 1\cdot4+0=4,\ 1\cdot4+0=4,\ 1\cdot4-2=2,\ 1\cdot2-1=1,\ 1\cdot1-1=0.$$

A második sor elemei (az utolsó nulla kivételével) a keresett polinom együtthatói. A nevezőben lévő kifejezés szorzatrabontása egy nevezetes szorzatból kapjuk. Így

$$\lim_{x\to1}\frac{x^6+3x^5-2x^2-x-1}{x^3-1}=$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^5+4x^4+4x^3+4x^2+2x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{x^5+4x^4+4x^3+4x^2+2x+1}{x^2+x+1}=\frac{16}{3}.$$

d) $\boxed{\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}}$

Végezzük el a következő átalakításokat!

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\cdot\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{\sqrt{1+x^2}+1}=$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1+x^2-1}{x(\sqrt{1+x^2}+1)}=\lim_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}=\frac{0}{\sqrt{1+0^2}+1}=0$$

e) $\boxed{\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}}$

Hozzuk közös nevezőre a kifejezést!

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$$

f) $\boxed{\lim\limits_{x\to2}\dfrac{3-\sqrt{x+7}}{x^2-4}}$

Végezzük el a következő átalakításokat!

$$\lim_{x\to2}\frac{3-\sqrt{x+7}}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\frac{3-\sqrt{x+7}}{x^2-4}\cdot\frac{3+\sqrt{x+7}}{3+\sqrt{x+7}}=$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{9-(x+7)}{(x-2)(x+2)(3+\sqrt{x+7})}=$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{-1}{(x+2)(3+\sqrt{x+7})}=-\frac{1}{24}$$

Az előző feladatban alkalmazott koncepció nem mindig alkalmazható, és emiatt más módszerek után kell kutatni. Az átviteli elvvel sikerült sorozatok segítségével elég hatékonyan kifejezni a pontbeli folytonosságot. Ebben az esetben is hasonlóan járunk el.

22. Tétel (Átviteli elv pontbeli határértékre)**.** *Legyen $H \subseteq \mathbf{R}$ és x_0 torlódási pontja H-nak. Ekkor az $f\colon H \to \mathbf{R}$ valós függvénynek akkor és csak akkor van határértéke az x_0 pontban, ha minden x_0-hoz tartó $\langle x_n \rangle\colon \mathbf{N} \to H \setminus \{x_0\}$ sorozat esetén teljesül, hogy az $y_n := f(x_n)$ sorozat egy közös A értékhez tart.*

Bizonyítás. A bizonyítás a pontbeli folytonosság átviteli elvéhez hasonlóan történik, ha $f(x_0)$ helyett az A számot írjuk, ezért nem részletezzük.

Az átviteli elv érthetően fejezi ki, hogy milyen tulajdonsággal bírjon a függvény az x_0 pont környezetében ahhoz, hogy a függvény ott folytonos lehessen. Mégpedig azzal, hogy minden értelmezési tartománybeli sorozatra, ami a ponthoz tart, de nem éri el a pontot, teljesüljön, hogy a képsorozata konvergens, és ugyanoda tart a sorozattól függetlenül. Röviden kifejezve:

$$\forall x_n \in D_f \setminus \{x_0\},\ x_n \to x_0 \implies f(x_n) \to A.$$

Ekkor A a függvény határértéke az x_0 pontban. Ez természetesen nem elegendő ahhoz, hogy a függvény folytonos legyen az x_0 pontban, hiszen szükséges még, hogy a függvény értelmezve legyen az x_0 pontban és $f(x_0) = A$.

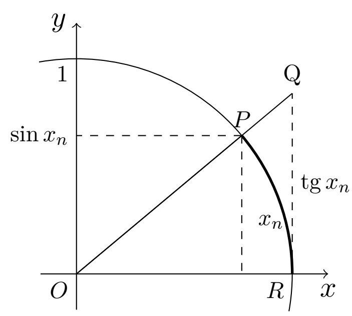
Az átviteli elv segíthet megoldani konkrét feladatokat és igazolni fontos elméleti tételeket. Először az elsőről kapunk ízelítőt a következő nevezetes határérték kiszámításakor.

23. Tétel.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Bizonyítás. Legyen $x_n \to 0$ egy pozitív valós számsorozat, így véges sok elemtől eltekintve $0 < x_n < \frac{\pi}{2}$.

Az ábrán jelölje O az origót, R az $(1,0)$ koordinátájú pontot, P olyan pontot, hogy a P és R közötti ív hossza x_n legyen, Q olyan pontot, amely rajta van az O-ból induló P-n átmenő félegyenesen és QR merőleges az x tengelyre. A szinusz és tangens függvény értelmezése miatt $\sin x_n$ a P pont és az x tengely távolsága, míg $\operatorname{tg} x_n$ a Q pont és az x tengely távolsága.



Az ORP háromszög területe kisebb, mint az ORP körcikk területe, ami kisebb mint az ORQ háromszög területe. Mivel $OR = 1$, az előző területek rendre $\frac{\sin x_n}{2}$, $\frac{x_n}{2}$ és $\frac{\operatorname{tg} x_n}{2}$, amiből

$$\sin x_n < x_n < \operatorname{tg} x_n,$$

következik. Mivel $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ és $\sin x_n \neq 0$, így a $\sin x_n$ kifejezéssel osztva az előző egyenlőtlenséget azt kapjuk, hogy

$$1 < \frac{x_n}{\sin x_n} < \frac{1}{\cos x_n}.$$

A koszinusz függvény folytonossága miatt $\cos x_n \to \cos 0 = 1$, ha $x_n \to 0$, így

$$1 < \frac{x_n}{\sin x_n} < \frac{1}{\cos x_n} \to 1.$$

Ekkor a Rendőr-elv miatt

$$\frac{x_n}{\sin x_n} \to 1, \qquad \text{azaz} \qquad \frac{\sin x_n}{x_n} \to 1.$$

Ha $x_n \to 0$ és véges sok elemtől eltekintve negatív, akkor a

$$\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x}$$

azonosság miatt $\dfrac{\sin x_n}{x_n} \to 1$.

Ha $x_n \to 0$, de végtelen sok pozitív és negatív elemből áll, akkor a pozitív és a negatív elemekből álló részsorozatok egy diszjunkt felbontását alkotnak az $\langle x_n \rangle$ sorozatnak. Az előzőek alapján mindkét részsorozat

$$f(x) := \frac{\sin x}{x}$$

függvény szerinti képsorozata 1-hez tart. Ezért a teljes $\langle x_n \rangle$ sorozat f szerinti képsorozata is 1-hez tart, azaz

$$\frac{\sin x_n}{x_n} \to 1.$$

Ekkor az átviteli elv szerint igaz a tétel állítása.

Az átviteli elvet két fontos állítás igazolásában fogjuk alkalmazni, amelyekkel gyakran találkozunk feladatok megoldásában. Az első a pontbeli határérték és a műveletek közötti kapcsolatot mutatja. A második az összetett függvény pontbeli határértékéről szól.

24. Tétel (A pontbeli határérték és a műveletek felcserélhetősége)**.** *Legyen $H \subseteq \mathbf{R}$, $x_0 \in H$ torlódási pontja H-nak, $c \in \mathbf{R}$ és $f, g\colon H \to \mathbf{R}$ valós függvények. Ha létezik az f és a g függvény határértéke az x_0 pontban, akkor*

- $\lim\limits_{x\to x_0} cf(x) = c \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$
- $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
- $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$ *(ha $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$).*

Bizonyítás. A tétel állítása azonnal következik az átviteli elvből és a „Határértékszámítás” című tananyagban található, a határátmenet és a műveletek felcserélhetőségéről szóló tételből.

25. Tétel (Összetett függvény pontbeli határértéke)**.** *Legyen $H_1, H_2 \subseteq \mathbf{R}$ és $g\colon H_1 \to H_2$, $f\colon H_2 \to \mathbf{R}$ két valós függvény, továbbá x_0 és y_0 a H_1, illetve a H_2 halmaznak olyan torlódási pontjai, amire*

$$y_0 = \lim_{x\to x_0} g(x) \qquad \textit{és} \qquad A := \lim_{y\to y_0} f(y)$$

teljesül, ahol $A \in \mathbf{R}$. Ha még az x_0 pontnak van olyan környezete, ahol az x_0 pont kivételével a g függvény nem veheti fel az y_0 értéket, vagy f folytonos az y_0 pontban, akkor az $f \circ g$ függvénynek létezik határértéke az x_0 pontban és

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = A.$$

Bizonyítás. A feltételek szerint H_1 az $f \circ g$ összetett függvény értelmezési tartománya. Legyen $x_n \to x_0$ egy tetszőleges H_1-beli számsorozat, ami nem veszi fel az x_0 értéket. Mivel y_0 a g függvény pontbeli határértéke az x_0 pontban, így az átviteli elv szerint az $y_n := g(x_n)$ sorozat tart y_0-hoz, azaz $\langle y_n \rangle$ egy olyan H_2-beli számsorozat, amire $y_n \to y_0$ teljesül. Ekkor a tétel feltételei alapján két esetet fogunk megkülönböztetni.

- Az x_0 pontnak van olyan környezete, ahol az x_0 pont kivételével a g függvény nem veheti fel az y_0 értéket. Mivel $x_n \to x_0$, így véges sok n kivételével az x_n eleme ennek a környezetnek. Véges sok sorozatbeli elem nem befolyásolja a sorozat határértéket, emiatt feltételezhető, hogy minden x_n a környezetnek eleme. Mivel A az f függvény pontbeli határértéke az y_0 pontban, így az átviteli elv szerint minden H_2-beli sorozat, ami nem veszi fel az y_0 értéket és y_0-hoz tart olyan, hogy f szerinti képsorozata A-hoz tart. Mivel $\langle y_n \rangle$ ilyen sorozat, ezért $f(y_n) \to A$.

- f folytonos az y_0 pontban. Ekkor a folytonosságra vonatkozó átviteli elv szerint minden H_2-beli y_0-hoz tartó sorozat f szerinti képsorozata $f(y_0)$-hoz tart. Mivel $\langle y_n \rangle$ ilyen sorozat, ezért $f(y_n) \to f(y_0)$, de a folytonosság miatt $f(y_0) = A$, és így $f(y_n) \to A$.

Mindkét esetben azt igazoltuk, hogy $f(y_n) \to A$. Összefoglalva: minden $x_n \in H_1 \setminus \{x_0\}$ sorozat esetén, amire $x_n \to x_0$ teljesül igaz hogy

$$f(g(x_n)) = f(y_n) \to A.$$

Ezért az átviteli elv szerint

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = A.$$

Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

Az előző tétel feltételei élesek, amint a következő példa mutatja. Legyen

$$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} 1 & \text{ha } x \neq 0, \\ 0 & \text{ha } x = 0, \end{cases}$$

és

$$g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \qquad g(x) := \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{ha } x \neq 0, \\ 0 & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$

Minden $x_n \to 0$ nem nulla elemeket tartalmazó sorozat esetén a

$$g(x_n) = x_n \sin \frac{1}{x_n}$$

sorozat előáll egy nullához tartó és egy korlátos sorozat szorzataként, ami miatt nullához tart, azaz $g(x_n) \to 0 = g(0)$. Ezért az átviteli elv miatt a g függvény folytonos az $x_0 = 0$ pontban. Tehát

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = 0.$$

Másrészt az f függvény nem folytonos az $y_0 = 0$ pontban, de

$$\lim_{y \to y_0} f(y) = 0.$$

Így a tételben alkalmazott jelölések értelmében $A = 0$. Vegyük az

$$x_n := \frac{1}{2\pi n}$$

sorozatot! Mivel $x_n \to 0$ és $g(x_n) = 0$, így az $x_0 = 0$ pontnak nincs olyan környezete, ahol az x_0 pont kivételével a g függvény nem venne fel az $y_0 = 0$ értéket. Másrészt $f(g(x_n)) = f(0) = 1$. Ezért az $f \circ g$ függvény határértéke az x_0 pontban nem lehet A.

A 25. Tétel eredménye a

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = \lim_{y\to y_0} f(y)$$

módon is írható, ami felfogható, mint ha a $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x))$ határértékben alkalmaztuk volna az $y = g(x)$ helyettesítést $y \to y_0$ mellett. Lássuk ennek alkalmazását a gyakorlatban! Számítsuk ki a

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$$

határértéket! Először végezzük el a következő átalakításokat!

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin 2x}{x}}{\frac{\sin 3x}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{2\frac{\sin 2x}{2x}}{3\frac{\sin 3x}{3x}} \tag{4}$$

Az $y = 2x$ helyettesítéssel, ha $x \to 0$, akkor $y \to 0$, ezért a 23. Tételben szereplő nevezetes határérték szerint

$$\lim_{x\to 0} 2\frac{\sin 2x}{2x} = \lim_{y\to 0} 2\frac{\sin y}{y} = 2 \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 2.$$

Hasonlóan, az $y = 3x$ helyettesítéssel azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to 0} 3\frac{\sin 3x}{3x} = 3.$$

Így (4) jobb oldalán szereplő hányados határértéke olyan, hogy létezik külön a számló és a nevező kifejezés határértéke, és ez utóbbi nem nulla. Ezért a pontbeli határérték és a műveletek felcserélhetőségéről szóló tétel szerint

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\frac{\sin 2x}{2x}}{3\frac{\sin 3x}{3x}} = \frac{\lim\limits_{x\to 0} 2\frac{\sin 2x}{2x}}{\lim\limits_{x\to 0} 3\frac{\sin 3x}{3x}} = \frac{2}{3}.$$

3. Feladat. *Határozzuk meg a következő határértékeket!*

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 3x}{x}$, *b)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 2x}{x^2}$,

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$, *d)* $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin 2x}{x-\pi}$.

Megoldás: A feladatok megoldásában értelemszerűen alkalmazzuk a pontbeli határérték és a műveletek felcserélhetőségéről szóló tételt.

a) Alkalmazzuk az $y = 3x$ helyettesítést! Ha $x \to 0$, akkor $y \to 0$, így

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x\cos 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos 3x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos 3x} \cdot \lim_{x\to 0} 3\frac{\sin 3x}{3x} = 3 \lim_{y\to 0} \frac{1}{\cos y} \cdot \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 3.$$

b) Alkalmazzuk az $y = 2x$ helyettesítést! Ha $x \to 0$, akkor $y \to 0$, így

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 2x}{x^2} = \left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x}\right)^2 = \left(\lim_{x\to 0} 2\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2 = 4\left(\lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y}\right)^2 = 4.$$

Megjegyzés: a feladat a $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ azonosság segítségével is megoldható.

c) Végezzük el a következő átalakításokat!

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\cos x} \cdot \left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

d) Alkalmazzuk az $y = x - \pi$ és $z = 2y$ helyettesítéseket! Ha $x \to \pi$, akkor $y \to 0$ és $z \to 0$, így

$$\lim_{x\to \pi} \frac{\sin 2x}{x-\pi} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin 2(y+\pi)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin 2y}{y} =$$
$$= 2\lim_{y\to 0} \frac{\sin 2y}{2y} = 2\lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 2.$$

7. Szakadási helyek osztályozása

Az előző részekben találkoztunk olyan függvényekkel, amelyek nem folytonosak, azaz legalább egy olyan értelmezési tartománybeli pontjuk volt, ahol a függvény nem folytonos. Ilyen például az

$$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} x^2 & \text{ha } x \neq 0, \\ 1 & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$

függvény, amely nem folytonos az $x_0 = 0$ pontban. Az olyan értelmezési tartománybeli pontot, ahol a függvény nem folytonos, a függvény **szakadási helyének** nevezzük.

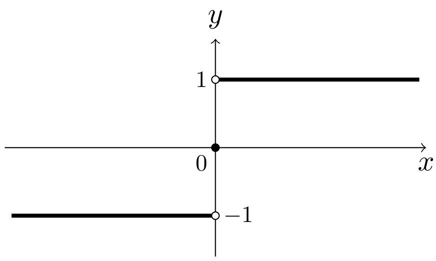
Ebben a részben részletesen fogjuk megtárgyalni azokat az okokat, amik ahhoz vezetnek, hogy egy függvénynek szakadási helye legyen egy adott pontban. A legegyszerűbb ok az előző példában látható, azaz a függvénynek létezik határértéke egy adott pontban, de ott a határérték nem egyezik meg a függvény által felvett értékkel. Ekkor azt mondjuk, hogy az f függvénynek **megszüntethető szakadása** van az x_0 pontban.

A megszüntethető szakadás elnevezés azt sugallja, hogy a függvény pontbeli értékének megváltoztatásával olyan függvényt kaphatunk, amely már folytonos a megadott pontban. Ehhez persze nem akármilyen értéket adhatunk, kizárólag a függvény a pontban való határértéke jöhet szóba. Sajnos ez utóbbi nem mindig létezik. Ez látható a következő példában.

Az $f(x) := \operatorname{sign} x$ függvény esetében a

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sign} x$$

határérték nem létezik. Ennek oka, hogy minden $x_n \to 0$ pozitív elemekből álló sorozat esetén $f(x_n) = 1$, de ha a sorozat negatív elemekből áll, akkor $f(x_n) = -1$. Így az átviteli elv szerint a határérték nem létezik.



$f(x) = \operatorname{sign} x$

Azonban más a helyzet, ha a szignum függvény $x_0 = 0$ pont köröli veselkedését csak a pont bal vagy jobb oldalán vizsgálnánk. Pontosabban, ha a szignum függvényt a pozitív számok halmazára szűkítenénk, akkor az így kapott függvénynek az azonosan 1 függvény lenne, és így már létezne határértéke az $x_0 = 0$ pontban, ami 1-gyel lenne egyenlő. Hasonlóan, ha a negatív számok halmazára szűkítenénk, akkor a határértéke az $x_0 = 0$ pontban -1 lenne.

Az előző gondolatmenet alkalmazható bármilyen H halmazon értelmezett függvényre, de csak olyan x_0 pontban, amely torlódási pontja a $H \cap]-\infty, x_0[$ vagy a $H \cap]x_0, \infty[$ halmaznak. Az első esetben azt mondjuk, hogy x_0 jobboldali torlódási pontja a H halmaznak. A második esetben azt mondjuk, hogy x_0 baloldali torlódási pontja a H halmaznak. Ez vezet a függvény bal- és jobboldali határérték fogalmához.

6. Definíció. *Legyen $H \subseteq \mathbf{R}$ és x_0 jobboldali torlódási pontja a H halmaznak. Azt mondjuk, hogy az $f\colon H \to \mathbf{R}$ valós függvénynek van baloldali határértéke az x_0 pontban és ez a B_1 valós számmal egyenlő, ha az f függvény a $H \cap]-\infty, x_0[$ halmazra való lészűkítésének van határértéke az x_0 pontban, és ez B_1-gyel egyenlő. Ekkor a*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = B_1$$

jelölést alkalmazzuk.

7. Definíció. *Legyen $H \subseteq \mathbf{R}$ és x_0 baloldali torlódási pontja a H halmaznak. Azt mondjuk, hogy az $f\colon H \to \mathbf{R}$ valós függvénynek van jobboldali határértéke az x_0 pontban és ez a B_2 valós számmal egyenlő, ha az f függvény a $H \cap]x_0, \infty[$ halmazra való lészűkítésének van határértéke az x_0 pontban, és ez B_2-vel egyenlő. Ekkor a*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = B_2$$

jelölést alkalmazzuk.

Alkalmazzuk az átviteli elvet közvetlenül a baloldali határérték fogalmában szereplő leszűkített függvényre! Azt kapjuk, hogy tetszőleges x_0-hoz tartó $H \cap]-\infty, x_0[$-beli sorozat képsorozata egy közös B_1 értékhez tart. Emiatt csak azok az értelmezési tartománybeli sorozatok jöhetnek szóba, amelyeknek értéke kisebb, mint x_0. Röviden kifejezve:

$$\forall x_n \in D_f \setminus \{x_0\},\ x_n < x_0,\ x_n \to x_0 \implies f(x_n) \to B_1.$$

Ezt hívjuk átviteli elvnek a függvény baloldali határértékére vonatkozóan. Hasonlóan járunk el jobboldali határérték esetén. Ekkor azt kapjuk, hogy tetszőleges értelmezési tartománybeli sorozatra, amelynek értéke nagyobb, mint x_0, igaz, hogy a képsorozata egy közös B_2 értékhez tart, azaz

$$\forall x_n \in D_f \setminus \{x_0\},\ x_n > x_0,\ x_n \to x_0 \implies f(x_n) \to B_2.$$

Ez az átviteli elv a függvény jobboldali határértékre vonatkozóan.

A definícióból is látható, hogy a bal- és jobboldali határérték szorosan kapcsolódik a függvény bal- és jobboldali folytonosságához ugyanúgy, ahogy a pontbeli határérték kapcsolódik a függvény folytonosságához a pontban. Ez azt jelenti, hogy ha $x_0 \in H$ és még jobboldali torlódási pontja a H halmaznak, akkor az $f\colon H \to \mathbf{R}$ valós függvény akkor és csak akkor balról folytonos az x_0 pontban, ha ott létezik a függvény baloldali határértéke és

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

Hasonlóan, ha $x_0 \in H$ és még baloldali torlódási pontja a H halmaznak, akkor az $f\colon H \to \mathbf{R}$ valós függvény akkor és csak akkor jobbról folytonos az x_0 pontban, ha ott létezik a függvény jobboldali határértéke és

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

Ha egy függvény határértéke létezik egy megadott pontban, és a pontot tetszőleges pontossággal meg tudjuk közelíteni nála kisebb és nagyobb értelmezési tartománybeli értékekkel, azaz egyszerre bal- és jobboldali torlódási pontja az értelmezési tartománynak, akkor létezik a bal- és jobboldali határértéke a pontban, és a kettő egyenlő. Ez az állítás megfordítható, ahogy a következő tétel állítja.

26. Tétel. *Legyen $H \subseteq \mathbf{R}$ és x_0 egyszerre bal- és jobboldali torlódási pontja a H halmaznak. Az $f\colon H \to \mathbf{R}$ valós függvénynek akkor és csak akkor van határértéke az x_0 pontban, ha van bal- és jobboldali határértéke az x_0 pontban és ezek egyenlők. Ekkor*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x).$$

Bizonyítás. Ha létezik a függvény határértéke az x_0 pontban, akkor minden x_0-hoz tartó sorozat tart egy közös A értékhez, beleértve azokat is, melyek nagyobbak vagy kisebbek, mint x_0, így létezik bal- és jobboldali határértéke az x_0 pontban, és mindkettő A-val egyenlő.

Fordítva tegyük fel, hogy létezik a függvénynek bal- és jobboldali határértékek az x_0 pontban és ezek egyenlők egy A értékkel. Vegyünk egy $x_n \to x_0$, H-beli sorozatot.

- Ha x_n csak véges sok pozitív vagy negatív elemet tartalmaz, akkor véges sok elemtől eltekintve balról vagy jobbról tart az x_0 értékhez, és így mindkét esetben $f(x_n) \to A$, hiszen véges sok elem nem befolyásolja a sorozat határértékét.

- Ha x_n végtelen sok pozitív és negatív elemből áll, akkor diszjunkt módon felbontható csak pozitív $\langle x_n^{(1)} \rangle$ és csak negatív $\langle x_n^{(2)} \rangle$ elemekből álló részsorozatokra, ahol $x_n^{(1)} \to x_0$ jobbról és $x_n^{(2)} \to x_0$ balról. Ekkor $f(x_n^{(1)}) \to A$ és $f(x_n^{(2)}) \to A$, és mivel $\langle f(x_n^{(1)}) \rangle$ és $\langle f(x_n^{(2)}) \rangle$ egy diszjunkt felbontása az $\langle f(x_n) \rangle$ sorozatnak, így $f(x_n) \to A$.

Így a határértékre vonatkozó átviteli elv szerint

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

Azt mondjuk, hogy egy függvénynek **elsőfajú szakadási helye** van az x_0 értelmezési tartománybeli pontban, ha ott nem folytonos, de ha bal- vagy jobboldali torlódási pontja a H halmaznak, akkor a megfelelő egyoldali határértéke létezik. Más szavakkal, olyan szakadási helyről van szó, hogy ha a definíció szerint képezhető a baloldali határértéke, akkor ez létezik, illetve ugyanez érvényes a jobboldali határértékére is. Ennek értelmében egy megszüntethető szakadási hely is elsőfajú szakadási helynek számít.

Vannak olyan szakadási helyek, amelyek nem elsőfajúak. Ekkor **másodfajú szakadási helyekről** beszélünk. Ezekről szeretnék két példát mutatni.

Az első példa a jól ismert

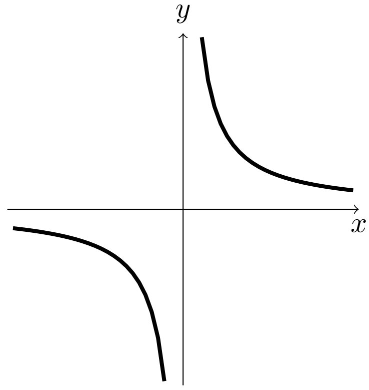
$$f\colon R\setminus\{0\}\to\mathbf{R},\qquad f(x)=\frac{1}{x}$$

függvény, amelynek nem létezik sem a baloldali, sem a jobboldali határértéke az $x_0=0$ pontban, hiszen

$$\text{ha } x_n\to 0,\ \text{és } x_n>0,\ \text{akkor } f(x_n)\to\infty.$$

Hasonlóan

$$\text{ha } x_n\to 0,\ \text{és } x_n<0,\ \text{akkor } f(x_n)\to-\infty.$$



$f(x)=\frac{1}{x}$

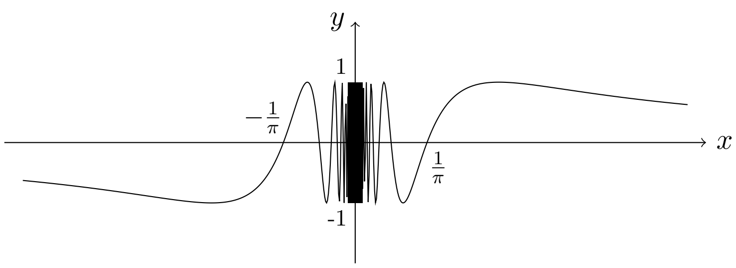
Már a sorozatok esetében is értelmeztük a végtelent és a mínusz végtelent, mint tágabb értelemben vett határértéket, hiszen láttuk, hogy ez a divergenciatípus olyan tulajdonságokat rejt, ami néha emlékeztet a „rendes” határértékhez, és jól szemléltethető viselkedést mutat. Ezért érdemes a **tágabb értelemben vett határértéket** értelmezni bal- és jobboldali határértékekre is. Ezt úgy tudjuk a legegyszerűbben megtenni, hogy az átviteli elvben szereplő B_1 és B_2 számok helyet ∞ vagy $-\infty$ szimbólumokat írunk. Az új értelmezéssel már azt írhatjuk, hogy

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{1}{x}=\infty,\qquad \text{és}\qquad \lim_{x\to x_0^-}\frac{1}{x}=-\infty.$$

A másik nagyon érdekes példa az

$$f\colon R\setminus\{0\}\to\mathbf{R},\qquad f(x)=\sin\frac{1}{x}$$

függvény.



$f(x)=\sin\frac{1}{x}$

Mivel a szinusz függvény az $[1, \infty[$ intervallumban végtelen sokszor „hullámzik” és a

$$g\colon R \setminus \{0\} \to \mathbf{R}, \qquad g(x) := \frac{1}{x}$$

leképezés bijektív az $[1, \infty[$ és $]0, 1]$ intervallumok között, ezért f végtelen sokszor fog hullámozni a $]0, 1]$ intervallumon, ahogy az ábrán is látható. Ugyanígy a $]-1, 0]$ intervallumon is. Ezért nem létezik a függvény határértéke az $x_0 = 0$ pontban még tágabb értelemben sem, hiszen

- ha $x_n := \dfrac{1}{2\pi n} \to 0$, akkor $f(x_n) = \sin 2\pi n = 0 \to 0$,
- ha $x_n := \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} \to 0$, akkor $f(x_n) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1 \to 1$.

Így az átviteli elv követelményei nem teljesülnek az

$$f\colon R \setminus \{0\} \to \mathbf{R}, \qquad f(x) = \sin\frac{1}{x}$$

függvényre az $x_0 = 0$ pontban.

4. Feladat. *Indokolja meg, miért nem léteznek a következő határértékek!*

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{|x-1|}$, *b)* $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2}{x-2}$,

c) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x}{(x+1)^2}$, *d)* $\displaystyle\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}$,

e) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \operatorname{arctg} \frac{2x}{x-2}$, *f)* $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sin|x-1|}{x^2-1}$.

Megoldás:

a) $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{|x-1|}}$

Legyen $x_n \to 1$ egy sorozat, ahol $x_n = 1 + h_n$ úgy, hogy $h_n \to 0$. Ekkor

$$\frac{x_n - 1}{|x_n - 1|} = \frac{1 + h_n - 1}{|1 + h_n - 1|} = \frac{h_n}{|h_n|} = \begin{cases} 1 & \text{ha } h_n > 0, \\ -1 & \text{ha } h_n < 0. \end{cases}$$

Ezért

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{|x-1|} = 1, \quad \text{és} \quad \lim_{x\to 1^-} \frac{x-1}{|x-1|} = -1,$$

azaz a határérték nem létezik.

b) $\boxed{\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2}{x-2}}$

Legyen $x_n \to 2$ egy sorozat, ahol $x_n = 2 + \frac{1}{h_n}$ úgy, hogy $h_n \to \infty$ vagy $h_n \to -\infty$. Ekkor

$$\frac{x_n^2}{x_n - 2} = \frac{(2+\frac{1}{h_n})^2}{2+\frac{1}{h_n}-2} = h_n\left(4 + 4\frac{1}{h_n} + \frac{1}{h_n^2}\right) =$$

$$= 4h_n + 4 + \underbrace{\frac{1}{h_n}}_{\to 0} \to \begin{cases} \infty & \text{ha } h_n \to \infty, \\ -\infty & \text{ha } h_n \to -\infty. \end{cases}$$

Ezért

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2}{x-2} = \infty, \quad \text{és} \quad \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2}{x-2} = -\infty,$$

azaz a határérték nem létezik.

c) $\boxed{\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x}{(x+1)^2}}$

Legyen $x_n \to -1$ egy sorozat, ahol $x_n = \frac{1}{h_n} - 1$ úgy, hogy $h_n \to \infty$ vagy $h_n \to -\infty$. Ekkor

$$\frac{x_n}{(x_n+1)^2} = \frac{\frac{1}{h_n} - 1}{\left(\frac{1}{h_n} - 1 + 1\right)^2} = \underbrace{h_n^2}_{\to\infty}\Bigg(\underbrace{\frac{1}{h_n}}_{\to 0} - 1\Bigg) \to -\infty.$$

Ezért

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x}{(x+1)^2} = -\infty, \quad \text{és} \quad \lim_{x\to -1^-} \frac{x}{(x+1)^2} = -\infty,$$

azaz a határérték nem létezik, de mivel mindkettő egyforma, így azt szokás írni, hogy

$$\lim_{x\to -1} \frac{x}{(x+1)^2} = -\infty.$$

d) $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}}$

Legyen $x_n \to 0$ egy sorozat, ahol $x_n = \frac{1}{h_n}$ úgy, hogy $h_n \to \infty$ vagy $h_n \to -\infty$. Ekkor az $f(x) = e^x$ grafikonjából

$$e^{\frac{1}{x_n}} = e^{h_n} \to \begin{cases} \infty & \text{ha } h_n \to \infty, \\ 0 & \text{ha } h_n \to -\infty, \end{cases}$$

következik. Ezért

$$\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = \infty, \quad \text{és} \quad \lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0,$$

azaz a határérték nem létezik.

e) $\boxed{\lim_{x\to 2} \operatorname{arctg} \frac{2x}{x-2}}$

Legyen $x_n \to 2$ egy sorozat, ahol $x_n = 2 + \frac{1}{h_n}$ úgy, hogy $h_n \to \infty$ vagy $h_n \to -\infty$. Ekkor

$$\frac{2x_n}{x_n - 2} = \frac{4 + \frac{2}{h_n}}{\frac{1}{h_n}} = h_n\left(4 + \underbrace{\frac{2}{h_n}}_{\to 0}\right) \to \begin{cases} \infty & \text{ha } h_n \to \infty, \\ -\infty & \text{ha } h_n \to -\infty. \end{cases}$$

Ekkor az $f(x) = \operatorname{arctg} x$ grafikonjából

$$\operatorname{arctg} \frac{2x_n}{x_n - 2} \to \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{ha } h_n \to \infty, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{ha } h_n \to -\infty, \end{cases}$$

következik. Ezért

$$\lim_{x\to 2^+} \operatorname{arctg} \frac{2x}{x-2} = \frac{\pi}{2}, \quad \text{és} \quad \lim_{x\to 2^-} \operatorname{arctg} \frac{2x}{x-2} = -\frac{\pi}{2},$$

azaz a határérték nem létezik.

f) $\boxed{\lim_{x\to 1} \frac{\sin|x-1|}{x^2-1}}$

Legyen $x_n \to 1$ egy sorozat, így $x_n = 1 + h_n$, ahol $h_n \to 0$. Ekkor

$$\frac{\sin|x_n - 1|}{x_n^2 - 1} = \frac{\sin|x_n - 1|}{(x_n - 1)(x_n + 1)} = \frac{\sin|h_n|}{h_n(h_n + 2)}.$$

Ha $h_n \to 0^+$, akkor

$$\frac{\sin|h_n|}{h_n(h_n+2)} = \underbrace{\frac{\sin h_n}{h_n}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{h_n + 2}}_{\to \frac{1}{2}} \to \frac{1}{2}.$$

Ha $h_n \to 0^-$, akkor

$$\frac{\sin|h_n|}{h_n(h_n+2)} = -\underbrace{\frac{\sin h_n}{h_n}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{h_n + 2}}_{\to \frac{1}{2}} \to -\frac{1}{2}.$$

Ezért

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\sin|x-1|}{x^2-1} = \frac{1}{2}, \quad \text{és} \quad \lim_{x\to 1^-} \frac{\sin|x-1|}{x^2-1} = -\frac{1}{2},$$

azaz a határérték most sem létezik.

5. Feladat. *Határozzuk meg a következő határértékeket!*

a) $\lim_{x\to 0} x[x]$, *b)* $\lim_{x\to -1} \frac{x^2+2x+1}{x^2+x}$,

c) $\lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}}$, *d)* $\lim_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)^2}{|x-1|}$.

Megoldás:

a) $\boxed{\lim_{x\to 0} x[x]}$

Legyen $x_n \to 0$, $x_n > 0$ egy sorozat. Ekkor véges sok elemtől eltekintve $0 < x_n < 1$ és így

$$x_n[x_n] = x_n \cdot 0 = 0 \to 0.$$

Legyen $x_n \to 0$, $x_n < 0$ egy sorozat. Ekkor véges sok elemtől eltekintve $-1 < x_n < 0$ és így

$$x_n[x_n] = \underbrace{x_n}_{\to 0} \cdot(-1) \to 0.$$

Mivel a bal- és jobboldali határérték megegyezik és 0-val egyenlő, ezért

$$\lim_{x\to 0} x[x] = 0.$$

b) $\boxed{\lim_{x\to -1} \frac{x^2+2x+1}{x^2+x}}$

Átalakítás és egyszerűsítés után az egy $x+1$ tényező marad a számlálóban, de ez nem jelet gondot.

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2+2x+1}{x^2+x} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)^2}{x(x+1)} = \lim_{x\to -1} \frac{x+1}{x} = \frac{-1+1}{-1} = 0.$$

c) $\boxed{\lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}}}$

Legyen $x_n \to 0$ egy sorozat, ahol $x_n = \frac{1}{h_n}$ úgy, hogy $h_n \to \infty$ vagy $h_n \to -\infty$. Ekkor az $f(x) = e^x$ grafikonjából

$$e^{-\frac{1}{x_n^2}} = e^{-h_n^2} \to 0$$

következik, hiszen $-h_n^2 \to -\infty$. Ezért

$$\lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0.$$

d) $\boxed{\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(x-1)^2}{|x-1|}}$

Legyen $x_n \to 1$ egy sorozat, ahol $x_n = 1 + h_n$ úgy, hogy $h_n \to 0$. Ekkor

$$\frac{\sin(x_n-1)^2}{|x_n-1|} = \frac{\sin h_n^2}{|h_n|} = \underbrace{|h_n|}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{\sin h_n^2}{h_n^2}}_{\to 1} \to 0.$$

Ezért

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)^2}{|x-1|} = 0.$$

6. Feladat. *Állapítsuk meg milyen típusú szakadási helyei vannak a következő függvényeknek!*

$$a)\quad f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{ha } x < 0, \\ 2x & \text{ha } 0 \le x < 1, \\ 2^x & \text{ha } x \ge 1, \end{cases}$$

$$b)\quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x = -1, \\ 2 & \text{ha } x = 0, \\ \dfrac{x^2-1}{x^2+x} & \text{egyébként}, \end{cases}$$

$$c)\quad f(x) = \begin{cases} 2^{\frac{1}{x}} & \text{ha } x < 0, \\ 0 & \text{ha } x = 0, \\ \dfrac{\sin 2x}{x} & \text{ha } x > 0, \end{cases}$$

$$d)\quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x = 0, \\ 0 & \text{ha } x = 4, \\ \dfrac{\sin x}{|x||x-4|} & \text{egyébként}, \end{cases}$$

$$e)\quad f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{ha } x \text{ racionális szám}, \\ 4-3x & \text{ha } x \text{ irracionális szám}. \end{cases}$$

Megoldás: Az utolsó feladat kivételével a fenti függvények folytonos függvényekből tevődnek össze, ezért a szakadási helyeket csak a váltási pontokban kell keresni.

a) $\boxed{f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{ha } x<0,\\ 2x & \text{ha } 0\le x<1,\\ 2^x & \text{ha } x\ge 1,\end{cases}}$

A polinom és az exponenciális függvény folytonosságából következik, hogy a függvénynek csak a 0 és 1 váltási pontban lehet szakadási helye. Mivel

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} x^2+1=1 \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} 2x=0,$$

így a függvénynek elsőfajú szakadása van a 0 pontban. Továbbá

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} 2x=2 \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} 2^x=2,$$

valamint $f(1)=2$, így a függvény folytonos az 1 pontban.

b) $\boxed{f(x)=\begin{cases} 0 & \text{ha } x=-1,\\ 2 & \text{ha } x=0,\\ \dfrac{x^2-1}{x^2+x} & \text{egyébként},\end{cases}}$

A racionális törtfüggvény folytonosságából következik, hogy a függvénynek csak a -1 és 0 váltási pontban lehet szakadási helye. Mivel

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+x}=\frac{(x-1)(x+1)}{x(x+1)}=\frac{x-1}{x},$$

ha $x\neq -1$ és $x\neq 0$, így

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{x-1}{x}=2, \qquad \text{de} \qquad f(-1)=0,$$

azaz a függvénynek megszüntethető szakadása van a -1 pontban. Másrészt

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x-1}{x}=\infty, \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-1}{x}=-\infty,$$

azaz a függvénynek másodfajú szakadása van a 0 pontban.

c) $\boxed{f(x)=\begin{cases} 2^{\frac{1}{x}} & \text{ha } x<0,\\ 0 & \text{ha } x=0,\\ \dfrac{\sin 2x}{x} & \text{ha } x>0,\end{cases}}$

A racionális tört-, az exponenciális és a szinusz függvény folytonosságából, valamint az összetett függvények folytonosságáról szóló 5. Tétel alapján következik, hogy a függvénynek csak a 0 pontban lehet szakadási helye. Mivel

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} 2^{\frac{1}{x}}=0, \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin 2x}{x}=2,$$

ezért a függvénynek elsőfajú szakadása van a 0 pontban.

d) $\boxed{f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x = 0, \\ 0 & \text{ha } x = 4, \\ \dfrac{\sin x}{|x||x-4|} & \text{egyébként,} \end{cases}}$

A szinusz, a racionális tört- és az abszolút érték függvény folytonosságából következik, hogy a függvénynek csak a 0 és 4 pontban lehet szakadási helye. Mivel

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{|x||x-4|} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{|x-4|} \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{-x} = -\frac{1}{4},$$

és

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{|x||x-4|} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{|x-4|} \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{4},$$

ezért a függvénynek elsőfajú szakadása van a 0 pontban. Másrészt

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sin x}{|x|} = \frac{\sin 4}{4} < 0 \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to 4} \frac{1}{|x-4|} = \infty,$$

így

$$\lim_{x\to 4} f(x) = \lim_{x\to 4} \frac{\sin x}{|x||x-4|} = \lim_{x\to 4} \frac{\sin x}{|x|} \lim_{x\to 4} \frac{1}{|x-4|} = -\infty,$$

azaz a függvénynek másodfajú szakadása van a 4 pontban.

e) $\boxed{f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{ha } x \text{ racionális szám,} \\ 4-3x & \text{ha } x \text{ irracionális szám.} \end{cases}}$

Tekintsük a

$$g, h\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \qquad g(x) := x^2 \quad \text{és} \quad h(x) := 4-3x$$

folytonos függvényeket! Legyen $x_0 \in \mathbf{R}$. A g és h folytonosságából az következik, hogy ha $x_n \to x_0$ egy racionális számokból álló sorozat, akkor $f(x_n) = g(x_n) \to g(x_0)$ és ha $y_n \to x_0$ egy irracionális számokból álló sorozat, akkor $f(y_n) = h(y_n) \to h(x_0)$. Ezért az f függvénynek akkor és csak akkor létezik határértéke az x_0 pontban, ha $g(x_0) = h(x_0)$ és ebben az esetben folytonos is lesz. Ezért a függvény az

$$x^2 = 4-3x \qquad \Longrightarrow \qquad x = -4,\ x = 1$$

pontokban folytonos, a többi pontokban nincs határértéke, azaz másodfajú szakadási helyek.

7. Feladat. *Határozzuk meg a paramétereket úgy, hogy az alábbi függvények folytonosak legyenek!*

$$a)\quad f(x) = \begin{cases} |x| & \text{ha } x < a, \\ 2x & \text{ha } a \le x \le b, \\ x^2 & \text{ha } x > b, \end{cases}$$

$$b)\quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin a(x-1)}{x-1} & \text{ha } x < 1, \\ x^2 - ax & \text{ha } x \ge 1. \end{cases}$$

Megoldás:

a) $\boxed{f(x) = \begin{cases} |x| & \text{ha } x < a, \\ 2x & \text{ha } a \le x \le b, \\ x^2 & \text{ha } x > b, \end{cases}}$

A polinom és az abszolút érték függvény folytonosságából következik, hogy a függvény az $x = a$ és $x = b$ pontokon kívül folytonos. Mivel

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^-} |x| = |a| \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} 2x = 2a,$$

így a függvény folytonos az a pontban, ha $|a| = 2a$, azaz $a = 0$. Továbbá

$$\lim_{x\to b^-} f(x) = \lim_{x\to b^-} 2x = 2b \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to b^+} f(x) = \lim_{x\to b^+} x^2 = b^2,$$

így a függvény folytonos az b pontban, ha $2b = b^2$, ami csak $b = 1$ esetén lehetséges, hiszen $b > a = 0$.

b) $\boxed{f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin a(x-1)}{x-1} & \text{ha } x < 1, \\ x^2 - ax & \text{ha } x \ge 1. \end{cases}}$

A szinusz és a racionális törtfüggvény folytonosságából következik, hogy a függvény az $x = 1$ ponton kívül folytonos. Mivel

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{\sin a(x-1)}{x-1} = a,$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} x^2 - ax = 1 - a,$$

így a függvény folytonos, ha $a = 1 - a$, azaz $a = \frac{1}{2}$.

Az 5. Részben bevezettük az egyenletesen folytonosság fogalmát, és azt láttuk, hogy ez a folytonosságnál „erősebb” tulajdonság. A következő állítás ezt megerősíti.

27. Tétel. *Legyen $H \subseteq \mathbf{R}$, valamint x_0 torlódási pontja a H halmaznak. Ha $f\colon H \to \mathbf{R}$ egy egyenletesen folytonos függvény, akkor létezik a függvény határértéke az x_0 pontban.*

Bizonyítás. Az egyenletesen folytonosság fogalma szerint $\forall\varepsilon > 0$-hoz $\exists\delta > 0$, hogy ha

$$|x - y| < \delta \text{ és } x, y \in A, \text{ akkor } |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Legyen $x_n \to x_0$ egy tetszőleges H-beli sorozat. Mivel $\langle x_n\rangle$ konvergens, így a Cauchy-féle konvergencia kritérium szerint $\langle x_n\rangle$ Cauchy sorozat, azaz $\exists n_0 \in \mathbf{N}$ úgy, hogy ha $n, m > n_0$, akkor $|x_n - x_n| < \delta$, és így $|f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon$. Ez azt jelenti, hogy $y_n := f(x_n)$ Cauchy sorozat, azaz konvergens. Ezzel azt igazoltuk, hogy minden x_0-hoz tartó sorozat képsorozata konvergens, de még azt is kell igazolni, hogy ezek egy közös A értékhez tartanak az $\langle x_n\rangle$ sorozattól függetlenül, ami a függvény határértéke lesz az x_0 pontban.

Ehhez vegyünk két x_0-hoz tartó $\langle x'_n\rangle$ és $\langle x''_n\rangle$ sorozatot, amelyre $f(x'_n) \to A$ és $f(x''_n) \to B$. Egyesítjük az $\langle x'_n\rangle$ és $\langle x''_n\rangle$ sorozatokat egy $\langle x_n\rangle$ sorozatban úgy, hogy $\langle x'_n\rangle$ a páros, $\langle x''_n\rangle$ a páratlan indexekből álló részsorozatai legyenek az $\langle x_n\rangle$ sorozatnak. Ekkor $x_n \to x_0$, azaz $\langle f(x_n)\rangle$ konvergensnek kell legyen, de nyilván csak akkor lehet az, ha $\langle f(x'_n)\rangle$ és $\langle f(x''_n)\rangle$ részsorozatai ugyanoda tartanak, azaz $A = B$. Ezzel a tétel állítását igazoltuk. $\square$

Az előző állításból következik, hogy egy H halmazon értelmezett egyenletesen folytonos függvény folytonosan kiterjeszthető arra a halmazra, amely H elemeiből és torlódási pontjaiból áll. Ez például azt jelenti, hogy az $]a, b[$ véges nyílt intervallumon értelmezett egyenletesen folytonos f függvény esetén az

$$f(a) := \lim_{x\to a^+} f(x), \qquad \text{és} \qquad f(b) := \lim_{x\to b^-} f(x)$$

definícióval egy, az $[a, b]$ zárt intervallumon értelmezett folytonos függvényt kapunk.

8. Függvény határértéke a végtelenben

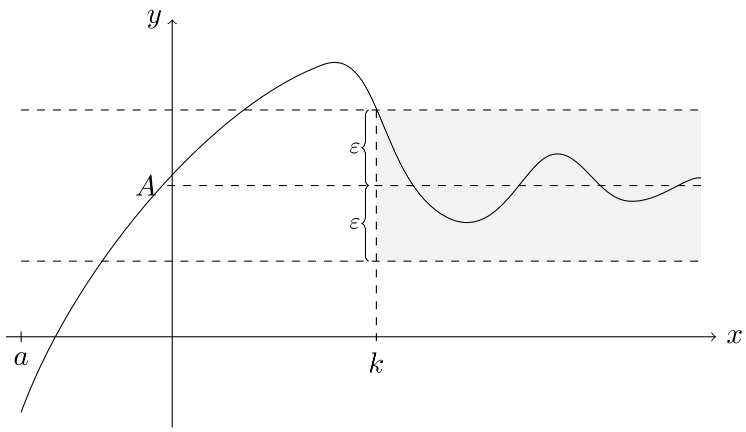
A valós függvények ábrázolásakor figyelembe kell venni, hogy egy függvény értelmezési tartománya gyakran nem korlátos, és emiatt nem tudjuk teljesen megrajzolni a grafikonját. Ennek ellenére az ábrából ki kell derülnie azt a tendenciát, ami a függvényt jellemzi nagyon nagy értékek esetén. Ilyen tendencia az, amikor a függvénynek van határértéke a végtelenben.

8. Definíció. *Legyen $H \subseteq \mathbf{R}$ egy felülről nem korlátos halmaz. Azt mondjuk, hogy az $f\colon H \to \mathbf{R}$ valós függvénynek létezik határértéke a végtelenben és ez A-val egyenlő, ha*

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists k \in \mathbf{R}, \text{ hogy ha } x > k \text{ és } x \in H, \text{ akkor } |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Ekkor a $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ jelölést alkalmazzuk.

A függvény határértéke a végtelenben, vagy más néven végtelenben vett határértéke, a következő ábrával szemléltethető. Egy $H =]a, \infty[$ intervallumon értelmezett függvénynél vesszünk egy tetszőleges $\varepsilon > 0$ számot, és azt az x tengellyel párhuzamos 2ε szélességű sávot rajzoljuk, amelynek szimmetriatengelye átmegy a $(0, A)$ koordinátájú ponton. Ha A a függvény határértéke a végtelenben, akkor van olyan k szám, amitől kezdve a függvény grafikonja a 2ε szélességű sávon belül marad.



Ez azt jelenti, hogy a függvény értéke egyre közelebb kerül az A értékhez, ahogy x egyre jobban nő. Pontosabban, minden végtelenhez tartó, értelmezési tartománybeli sorozat képsorozata egy közös A értékhez tart. Így kapunk meg egy újabb átviteli elvet.

28. Tétel (Átviteli elv végtelenben vett határértékre)**.** *Legyen $H \subseteq \mathbf{R}$ egy felülről nem korlátos halmaz. Ekkor az $f\colon H \to \mathbf{R}$ valós függvénynek akkor és csak akkor van határértéke a végtelenben, ha minden $x_n \to \infty$ értelmezési tartománybeli sorozat esetén teljesül, hogy az $y_n := f(x_n)$ sorozat egy közös A értékhez tart.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az f függvénynek van határértéke a végtelenben. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. A definíció szerint

$$\exists k \in \mathbf{R}, \text{ hogy ha } x > k \text{ és } x \in H, \text{ akkor } |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Legyen $x_n \to \infty$ egy H-beli sorozat. Ennek definíciója szerint

$$\exists n_0 \in \mathbf{N}, \text{ hogy } x_n > k, \text{ ha } n > n_0.$$

Ennek következtében $|f(x_n) - A| < \varepsilon$, ha $n > n_0$, ami azt jelenti, hogy az $y_n := f(x_n)$ sorozat A-hoz tart.

Másrészt tegyük fel, hogy az f függvénynek nincs határértéke a végtelenben. Ekkor minden A számhoz $\exists \varepsilon > 0$, hogy $\forall k$ számhoz találunk olyan $x \in H$ számot, amire

$$x > k \qquad \text{és} \qquad |f(x) - A| > \varepsilon$$

teljesül. Legyen $k_n = n$ minden $n \in \mathbf{N}$ esetén és minden ilyen k számhoz válasszunk olyan x_n H-beli értéket, amire a fenti két egyenlőtlenség teljesül. Így olyan sorozatot találtunk, ami H-beli elemekből áll, és

$$x_n > k \qquad \text{és} \qquad |f(x_n) - A| > \varepsilon$$

teljesül. Az első egyenlőtlenség miatt $x_n \to \infty$, de a második egyenlőtlenség miatt $y_n = f(x_n) \not\to A$. Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

Az átviteli elv mutatja, hogyan lehet végtelenben vett határérték számolni. Veszünk egy tetszőleges végtelenhez tartó értelmezési tartománybeli sorozatot, és megvizsgáljuk, hogy a képsorozata mindig tart-e egy bizonyos értékhez. Például a szignum függvény esetén minden $x_n \to \infty$ sorozat pozitív véges sok elemtől eltekintve. Ekkor $f(x_n) = 1$, ezért

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{sign} x = 1.$$

Egy másik egyszerű példa az

$$f\colon R \setminus \{0\} \to \mathbf{R}, \qquad f(x) := \frac{1}{x}$$

függvény. Mivel minden $x_n \to \infty$ sorozat nem nulla véges sok elemtől eltekintve, így ekkor

$$f(x_n) = \frac{1}{x_n} \to 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Vizsgáljuk meg most az

$$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \qquad f(x) := x^2$$

függvényt! Minden $x_n \to \infty$ sorozat esetén $f(x_n) = x_n^2 \to \infty$, azaz divergens, ezért nem létezik a függvény határértéke a végtelenben. De olyan esetekben, amikor az összes képsorozat végtelenhez vagy mínusz végtelenhez tart, beszélhetünk tágabb értelemben vett határértékről. Annyi történt, hogy az átviteli elvben szereplő A nem csak valós szám, hanem végtelen vagy mínusz végtelen is lehet. Az előzőek szerint

$$\lim_{x\to\infty} x^2 = \infty.$$

Számoljuk ki a

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - 5x + 1}{4 - x^2}$$

határértéket! A határértékben szereplő függvény csak az $x = -2$ és $x = 2$ pontban nem értelmezhető. Egy $x_n \to \infty$ sorozat minden eleme nagyobb, mint 2, véges sok elemtől eltekintve. Ekkor

$$f(x_n) = \frac{3x_n^2 - 5x_n + 1}{4 - x_n^2} = \frac{3 - \overbrace{\frac{5}{x_n}}^{\to 0} + \overbrace{\frac{1}{x_n^2}}^{\to 0}}{\underbrace{\frac{4}{x_n^2}}_{\to 0} - 1} \to -3.$$

Ezért

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - 5x + 1}{4 - x^2} = -3.$$

Vegyük észre, hogy a végtelenben vett határérték esetében olyan jelölést alkalmazunk, ami nagyon emlékeztet a határértékszámításban alkalmazott jelölésre. Az előző példában használt megoldási módszer is hasonlít ahhoz, amit a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 - 5n + 1}{4 - n^2}$$

határérték megoldásában alkalmaznánk, ha x_n helyet n-et írunk. Ráadásul a végeredmény is ugyanaz. Kérdés, hogy mi a kapcsolat a két fogalom között.

Ha a függvény értelmezett egy felülről nem korlátos végtelen intervallumon, akkor az $x_n := n$ csak az egyik értelmezési tartománybeli sorozat, ami végtelenhez tart. Ezért ha a függvénynek van hátárértéke a végtelenben, akkor az $a_n := f(n)$ sorozat konvergens és

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{x\to\infty} f(x).$$

A fenti állítás szintén igaz tágabb értelemben vett határérték esetében. Azonban nem várható el, hogy az $x_n := n$ sorozat minden esetben egyedül képes legyen meghatározni a többi végtelenhez tartó sorozat képsorozatának viselkedését.

Például az

$$f\colon]0,\infty[\to \mathbf{R}, \quad f(x) := \sin(2\pi x)$$

függvény esetén

- ha $x_n := n$, akkor $f(x_n) = \sin(2\pi n) = 0$,
- ha $x_n := \frac{1}{4} + n$, akkor $f(x_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1$.

Így a függvény a végtelenben vett határértéke nem létezik még tágabb értelemben sem.

Az előzőek szerint, ha a függvénynek létezik végtelenben vett határértéke akár tágabb értelemben is, akkor az $a_n := f(n)$ sorozat meghatározza a függvény végtelenben vett határértékét, és így alkalmazhatjuk a sorozatok határértékszámítására vonatkozó tételeket és fogásokat (lásd a „Határértékszámítás" című tananyagot). Tehát a határérték létezése fontos kérdés, amelynek eldöntésében segíthet a következő állítás.

29. Tétel. *Legyen $f\colon H \to \mathbf{R}$ egy monoton függvény és x_0 a H halmaznak egy jobboldali torlódási pontja. Ekkor*

- *ha $x_0 \neq \sup H$, akkor a függvénynek létezik baloldali határértéke az x_0 pontban,*
- *ha $x_0 = \sup H$, akkor a függvénynek létezik tágabb értelemben vett baloldali határértéke az α pontban,*
- *ha a H halmaz nem korlátos felülről, akkor a függvénynek létezik tágabb értelemben vett határértéke a végtelenben.*

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy f egy monoton növekvő függvény. Mindhárom esetet egyszerre fogjuk igazolni. Az első két esetben jelölje $\alpha = x_0$, amíg a harmadik esetben $\alpha = \infty$. Legyen $\langle x_n \rangle$ egy olyan H-beli sorozat, amire teljesül, hogy $x_n \to \alpha$ és $x_n < \alpha$ minden $n \in \mathbf{N}$ esetén. Legyen

$$x'_n := \inf\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}.$$

Ekkor $\langle x'_n \rangle$ olyan monoton növekvő sorozat, amire teljesül, hogy $x'_n \leq x_n$ minden $n \in \mathbf{N}$ esetén és

$$\lim_{n\to\infty} x'_n = \lim_{n\to\infty} \inf\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\} = \liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_n = \alpha,$$

hiszen ha egy sorozat konvergens, akkor határértéke megegyezik a sorozat alsó határértékével (lásd a „Számsorozatok és tulajdonságaik" című tananyagot). Másrészt, mivel $x_n < \alpha$ és $x'_n \to \alpha$, így találunk az $\langle x'_n \rangle$ sorozatnak olyan $\langle x''_n \rangle$ részsorozata, amire $x_n \leq x''_n$ teljesül minden $n \in \mathbf{N}$ esetén. Összefoglalva, találtunk két monoton növekvő sorozatot, amire $x'_n \leq x_n \leq x''_n$ teljesül minden

$n \in \mathbf{N}$ esetén. Ekkor a függvény monotonitása miatt

$$f(x_n') \leq f(x_n) \leq f(x_n'')$$

minden $n \in \mathbf{N}$ esetén, sőt az $a_n' := f(x_n')$ és $a_n'' := f(x_n'')$ képsorozatok monoton növekvőek. Ezért mindkettő konvergens tágabb értelemben, de közös határértékük van, mert $\langle a_n'' \rangle$ részsorozata az $\langle a_n' \rangle$ sorozatnak. Jelölje β a közös határértéküket. Ekkor $\beta \in \mathbf{R}$, ha $\langle a_n' \rangle$ korlátos, illetve $\beta = \infty$, ha $\langle a_n' \rangle$ nem korlátos sorozat. Az előzőek szerint az $a_n := f(x_n)$ jelölés mellett

$$\beta \leftarrow a_n' \leq a_n \leq a_n'' \rightarrow \beta$$

teljesül, ezért Rendőr-elv szerint $a_n \to \beta$, azaz konvergens tágabb értelemben.

Eddig azt sikerült igazolnunk, hogy minden $x_n \to \alpha$ és $x_n < \alpha$ értelmezési tartománybeli sorozat esetén az $a_n := f(x_n)$ képsorozata konvergens tágabb értelemben. Igazolni fogjuk, hogy az ilyen sorozatok közös határértékkel rendelkeznek. Ellenkező esetben lenne közülük két olyan sorozat, amelynek képsorozata nem ugyanoda tart. Ekkor az a sorozat, melynek páros indexű részsorozata az egyik, páratlan indexű részsorozata pedig a másik sorozat elemeiből áll, tart α-hoz, elemei kisebbek, mint α, de képsorozata divergens. A közös határérték létezéséből az átviteli elv szerint következik, hogy a függvénynek létezik tágabb értelemben vett baloldali határértéke α-ban.

Az első esetben a határértét nem lehet végtelen, mert ha $\alpha \neq \sup H$ és α jobboldali torlódási pontja a H halmaznak, akkor van olyan $x \in H$, amire $x > \alpha$ teljesül. Mivel a függvény baloldali határértéke α-ban végtelen, így akármekkora nagy értékeket vesz fel α tetszőleges baloldali környezetében. Így lesz olyan $x' < \alpha$, hogy $f(x') > f(x)$, amiből következik, hogy f nem lehet monoton növekvő függvény.

Az állítás igazolására egy monoton csökkenő f függvény esetén alkalmazzuk az előző eredményt a $-f$ monoton növekvő függvényre. Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

Az előző állításból következik, hogy ha $\alpha > 0$, akkor

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^\alpha} = 0 \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to\infty} x^\alpha = \infty,$$

illetve ha $q > 1$, akkor

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{q}\right)^x = 0 \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to\infty} q^x = \infty.$$

Nevezetesen

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to\infty} e^x = \infty.$$

Valóban a fenti határértékekben szereplő függvények monotonitásából következik a határértékek létezése tágabb értelemben. Ezért az ekvivalens sorozatuk határértéke adja az értéküket.

Sok esetben éppen a sorozatoknál alkalmazható tételek garantálják a végtelenben vett határérték létezését. Valóban az átviteli elvből és a sorozatok határértékere vonatkozó határátmenet és műveletek felcserélhetőségéről szóló tételekből következik, hogy ha létezik az f és g függvény határértéke a végtelenben és $c \in \mathbf{R}$, akkor az cf, $f+g$, fg és f/g függvénynek létezik határértéke a végtelenben (az utóbbinál ha g határértéke nem nulla). Ekkor

- $\lim\limits_{x\to\infty} cf(x) = c \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$,
- $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) + \lim\limits_{x\to\infty} g(x)$,
- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)g(x) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to\infty} g(x)$,
- $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to\infty} f(x)}{\lim\limits_{x\to\infty} g(x)}$, ha $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) \neq 0$.

Hasonlóan az átviteli elvből, illetve a hátárátmenet és a gyökvonás felcserélhetőségből következik, hogy ha $q \geq 2$ egy egész szám, és létezik az f függvény határértéke a végtelenben, akkor az $\sqrt[q]{f}$ függvénynek is létezik határértéke a végtelenben és

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[q]{f(x)} = \sqrt[q]{\lim_{x\to\infty} f(x)},$$

kivéve természetesen, ha egyszerre n páros szám és az f függvény határértéke negatív.

Tágabb értelemben vett határértékekre, ha $b \in \mathbf{R}$, illetve

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to\infty} g(x) = b,$$

akkor

- $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x)+g(x)) = \infty$, $\qquad \lim\limits_{x\to\infty} (f(x)-g(x)) = \infty$,
- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)g(x) = \begin{cases} \infty & \text{ha } b > 0, \\ -\infty & \text{ha } b < 0, \end{cases} \qquad \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \infty & \text{ha } b > 0, \\ -\infty & \text{ha } b < 0. \end{cases}$

teljesül. Ez ugyanúgy az átviteli elvből és a „Számsorozatok és tulajdonságaik” című tananyagban a sorozatokra igazolt megfelelő állításból következik.

Az előzőek szerint a végtelenben vett határérték kiszámításában ugyanazokat a fogásokat alkalmazunk, mint sorozatok esetén. Például

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - x + 2}{x^3 - 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^3} \cdot \frac{3 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0} \cdot \frac{3 - \overbrace{\frac{1}{x}}^{\to 0} + \overbrace{\frac{2}{x^2}}^{\to 0}}{1 - \underbrace{\frac{1}{x^3}}_{\to 0}} = 0.$$

Egy másik példa

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sqrt{x+3}}{2-\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x}\cdot\frac{1+\sqrt{\overbrace{\frac{1}{x}}^{\to 0}+\overbrace{\frac{3}{x^2}}^{\to 0}}}{\underbrace{\frac{2}{x}}_{\to 0}-\sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0}}}=-1.$$

A végtelenben vett határértékhez hasonlóan vizsgálhatjuk a függvény viselkedését nagyon nagy abszolút értékű, de negatív számok esetén, ha a függvény értelmezési tartománya nem korlátos alulról. Így eljutunk a mínusz végtelenben vett határérték fogalmához.

9. Definíció. *Legyen $H \subseteq \mathbf{R}$ egy alulról nem korlátos halmaz. Azt mondjuk, hogy az $f\colon H \to \mathbf{R}$ valós függvénynek létezik határértéke a mínusz végtelenben és ez A-val egyenlő, ha*

$$\forall\varepsilon > 0\text{-hoz } \exists k \in \mathbf{R},\ \text{ hogy ha } x < k \text{ és } x \in H,\ \text{ akkor } |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Ekkor a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$ jelölést alkalmazzuk.

Ez azt jelenti, hogy a függvény értéke egyre közelebb kerül az A értékhez, ahogy az x értéke egyre jobban csökken. Pontosabban, minden mínusz végtelenhez tartó, értelmezési tartománybeli sorozat képsorozata egy közös A értékhez tart. Tehát a mínusz végtelenben vett határértékre is adhatunk egy átviteli elvet, amivel hasonló technikákat tudunk kifejleszteni a kiszámítására. De erre nem lesz szükségünk, hiszen a definícióból látható, hogy ha az f függvénynek van határértéke a mínusz végtelenben, akkor az $f(-x)$ összetett függvénynek létezik határértéke a végtelenben és

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(-x).$$

Például számoljuk ki a következő határértéket!

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x}{2-x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{(-x)^2-x}{2-(-x)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x}{2-x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\overbrace{\frac{1}{x}}^{\to 0}}{\underbrace{\frac{2}{x^2}}_{\to 0}-1}=-1$$

A jobboldali és a mínusz végtelenben vett határértékekre igaz a 29. Tétel megfelelője, amely szintén segíthet eldönteni a határérték létezését konkrét esetekben.

30. Tétel. *Legyen $f\colon H \to \mathbf{R}$ egy monoton függvény és x_0 a H halmaznak egy baloldali torlódási pontja. Ekkor*

- *ha $x_0 \neq \inf H$, akkor a függvénynek létezik jobboldali határértéke az x_0 pontban,*
- *ha $x_0 = \inf H$, akkor a függvénynek létezik tágabb értelemben vett jobboldali határértéke az α pontban,*
- *ha a H halmaz nem korlátos alulról, akkor a függvénynek létezik tágabb értelemben vett határértéke a mínusz végtelenben.*

Bizonyítás. Az állítás azonnal következik a 29. Tétel az $f(-x)$ függvényre való alkalmazásából.

8. Feladat. *Határozzuk meg a következő határértékeket!*

a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x+1}+1}$, *b)* $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3^{x+1}-2^x}{\sqrt{9^x+1}+2^{2x-1}}$,

c) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-3x}{x^3+x^2+1}$, *d)* $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+3}{x-2}$,

e) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x}+x$, *f)* $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{2^{x+1}-3^x}{2\cdot 3^x+2^x}$.

Megoldás:

a)
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x+1}+1}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x+1}+1}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-(x^2-1)}{(\sqrt{x+1}+1)(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{(\sqrt{x+1}+1)(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\underbrace{\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}}_{\to 0}\cdot\frac{2}{\left(\sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}}+\underbrace{\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}}_{\to 0}\right)\left(\sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0}}+\sqrt{1-\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0}}\right)}=0$$

b) $$\lim_{x\to\infty}\frac{3^{x+1}-2^x}{\sqrt{9^x+1}+2^{2x-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3\cdot 3^x-2^x}{\sqrt{3^{2x}+1}+\frac{1}{2}4^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3\cdot 3^x-2^x}{3^x\sqrt{1+\frac{1}{3^{2x}}}+\frac{1}{2}4^x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\underbrace{\left(\frac{3}{4}\right)^x}_{\to 0}\frac{3-\overbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^x}^{\to 0}}{\underbrace{\left(\frac{3}{4}\right)^x}_{\to 0}\sqrt{1+\underbrace{\left(\frac{1}{9}\right)^x}_{\to 0}}+\frac{1}{2}}=0$$

c) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-3x}{x^3+x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{(-x)^2-3(-x)}{(-x)^3+(-x)^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x}{-x^3+x^2+1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}\frac{1+\overbrace{\frac{3}{x}}^{\to 0}}{-1+\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{1}{x^3}}_{\to 0}}=0$$

d) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+3}{x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2(-x)^2+3}{-x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3}{-x-2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\underbrace{x}_{\to\infty}\cdot\frac{2+\overbrace{\frac{3}{x^2}}^{\to 0}}{-1-\underbrace{\frac{2}{x}}_{\to 0}}=-\infty$$

e) $$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x}+x=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2-x}-x=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-x}-x)\frac{\sqrt{x^2-x}+x}{\sqrt{x^2-x}+x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x-x^2}{\sqrt{x^2-x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{\sqrt{x^2-x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{1-\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}}+1}=-\frac{1}{2}$$

f) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{2^{x+1}-3^x}{2\cdot 3^x+2^x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2\cdot 2^x-3^x}{2\cdot 3^x+2^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\cdot 2^{-x}-3^{-x}}{2\cdot 3^{-x}+2^{-x}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\overbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^x}^{\to 0}}{2\cdot\underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^x}_{\to 0}+1}=2$$

A 29. és a 30. Tételek segítenek meghatározni a határértéket inverz függvények esetén.

31. Tétel. *Legyen $f\colon H \to \mathbf{R}$ egy szigorúan monoton függvény és α_1 a H halmaznak egy baloldali, illetve α_2 egy jobboldali torlódási pontja. α_1 lehet mínusz végtelen ha H nem korlátos alulról, illetve α_2 lehet végtelen ha H nem korlátos felülről. Jelölje*

$$\beta_1 := \lim_{x\to\alpha_1^+} f(x) \qquad \text{és} \qquad \beta_2 := \lim_{x\to\alpha_2^-} f(x).$$

Ekkor

- *ha f szigorúan monoton növekvő, akkor létezik az inverz függvényének tágabb értelemben vett jobboldali határértéke β_1-ben, illetve tágabb értelemben vett baloldali határértéke β_2-ben, és*

$$\lim_{x\to\beta_1^+} f(x) = \alpha_1 \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to\beta_2^-} f(x) = \alpha_2.$$

- *ha f szigorúan monoton csökkenő, akkor létezik az inverz függvényének tágabb értelemben vett baloldali határértéke β_1-ben, illetve tágabb értelemben vett jobboldali határértéke β_2-ben, és*

$$\lim_{x\to\beta_1^-} f(x) = \alpha_1 \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to\beta_2^+} f(x) = \alpha_2.$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $f\colon H \to \mathbf{R}$ egy szigorúan monoton növekvő függvény és α a H halmaznak egy jobboldali torlódási pontja vagy $\alpha = \infty$. Legyen $\langle x_n\rangle$ egy olyan H-beli sorozat, amire teljesül, hogy $x_n \to \alpha$ és $x_n < \alpha$ minden $n \in \mathbf{N}$ esetén. Jelölje $y_n := f(x_n)$ a sorozat képsorozatát. A 29. Tétel szerint a függvénynek létezik tágabb értelemben vett baloldali határértéke az α pontban, vagy a végtelenben, ha $\alpha = \infty$. Jelölje β ezt a határértéket, ami végtelen is lehet, hiszen tágabb értelemben vett határértékről van szó. Az átviteli elv szerint $y_n \to \beta$ és $y_n < \beta$ minden $n \in \mathbf{N}$ esetén. A szigorú monotonitás miatt az f függvény invertálható és $\langle x_n\rangle$ az f^{-1} értelmezési tartományának egy sorozata. Ezért β ennek a tartománynak jobboldali torlódási pontja vagy $\beta = \infty$. Mivel az f^{-1} függvény is szigorúan monoton növekvő, így szintén a 29. Tétel szerint az f^{-1} függvénynek létezik tágabb értelemben vett baloldali határértéke β-ban. Az átviteli elv szerint szerint ez a határérték az $\langle y_n\rangle$ sorozat f^{-1} szerinti képsorozatának a határértéke, azaz $x_n = f^{-1}(y_n) \to \alpha$. Ezért

$$\lim_{x\to\beta^-} f(x) = \alpha.$$

A baloldali határértékre vonatkozó állítás hasonlóan, a 30. Tétel segítségével történik. Az állítás hasonlóan igazolható monoton csökkenő függvények esetén. Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

A tétel következményeként a következő határértékeket kapjuk.

$$\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty, \qquad \text{hiszen} \qquad \lim_{x\to\infty} e^x = \infty.$$

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty, \qquad \text{hiszen} \qquad \lim_{x\to -\infty} e^x = 0.$$

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}, \qquad \text{hiszen} \qquad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}-} \operatorname{tg} x = \infty.$$

$$\lim_{x\to -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}, \qquad \text{hiszen} \qquad \lim_{x\to -\frac{\pi}{2}+} \operatorname{tg} x = -\infty.$$

Pontbeli határérték kiszámításához bemutattuk egy nagyon hasznos technikát, amelynek lényege, hogy egy alkalmas helyettesítéssel leegyszerűsödik a határértékben lévő kifejezés. A módszer elméleti hátterét az összetett függvény pontbeli határértékéről szóló 25. Tétel írja le. A tétel általánosítható a végtelenben és a mínusz végtelenben vett határértékek hozzáadásával, ahogy ezt a következő állítás mutatja.

32. Tétel (Összetett függvény határértéke)**.** *Tegyük fel, hogy $H_1, H_2 \subseteq \mathbf{R}$ és $g\colon H_1 \to H_2$, $f\colon H_2 \to \mathbf{R}$ két valós függvény, továbbá α és β a H_1, illetve a H_2 halmaznak olyan kiterjesztett torlódási pontjai, amire a következő határértékek léteznek tágabb értelemben, és*

$$\beta = \lim_{x\to\alpha} g(x), \qquad \textit{illetve} \qquad \gamma := \lim_{x\to\beta} f(x)$$

teljesül. Tegyük fel még, hogy ha $\beta \in \mathbf{R}$, akkor α-nak van olyan környezete, ahol α kivételével a g függvény nem veheti fel a β értéket, vagy f folytonos a β pontban. Ekkor az $f \circ g$ függvénynek létezik határértéke a α-ban és

$$\lim_{x\to\alpha} f(g(x)) = \gamma.$$

Bizonyítás. A tétel bizonyítása szinte szóról szóra megegyezik a 25. Tétel bizonyításával annyi különbséggel, hogy x_0, y_0 és A helyet α, β és γ lehet végtelen vagy mínusz végtelen.

Az előző tételt már tudjuk végtelenben és mínusz végtelenben vett határértékekre is alkalmazni. Például

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = \lim_{x\to\infty} e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = \lim_{y\to\infty} \frac{1}{y} = 0,$$

ahol az $y = e^x$ helyettesítéssel $y \to \infty$, ha $x \to \infty$. Hasonlóan

$$\lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{y\to-\infty} e^y = 0,$$

ahol az $y = -\frac{1}{x^2}$ helyettesítéssel $y \to -\infty$, ha $x \to 0$.

A helyettesítéses módszer is alkalmazható bal- és jobboldali határértékekre is, ha figyelembe vesszük, hogy egy bal- vagy jobboldali határérték egyben a megfelelő környezetre leszűkített függvény pontbeli határértéke. Ilyenkor csak arról kell meggyőződnünk, hogy a leszűkített függvények kielégítik-e a tétel feltételeit, azaz a függvények értelmezhetők a megfelelő oldalú környezetekben. Például a

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\ln^2 x} = \lim_{y\to -\infty} \frac{1}{y^2} = 0,$$

határértéket az $y = \ln x$ helyettesítéssel oldottuk meg, ahol $y \to -\infty$, ha $x \to 0^+$, hiszen $\frac{1}{y^2}$ értelmezhető minden negatív y érték esetén.

9. Feladat. *Határozzuk meg a következő határértékeket!*

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{3x} - e^{x+1}}{2e^{3x} + 1}$, *b)* $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{\ln x + 1} - \sqrt{\ln x - 1}$,

c) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{e^{2x} + 4} - 2}{e^x}$, *d)* $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln^3 x + 2\ln x - 1}{\ln^2 x + 2\ln^3 x}$,

e) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \dfrac{\operatorname{tg}^2 x + 1}{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x}$, *f)* $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \dfrac{\operatorname{tg}^2 x + 1}{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x}$,

g) $\lim\limits_{x\to\infty} x \sin\dfrac{1}{x}$, *h)* $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)$.

Megoldás: A feladatokat az előbb bemutatott helyettesítéses módszerrel fogjuk megoldani.

a) Az $y = e^x$ helyettesítéssel, ha $x \to \infty$, akkor $y \to \infty$. Így

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{3x} - e^{x+1}}{2e^{3x} + 1} = \lim_{y\to\infty} \frac{y^3 - ey}{2y^3 + 1} = \lim_{y\to\infty} \frac{1 - e\frac{1}{y^2}}{2 + \frac{1}{y^3}} = \frac{1}{2}.$$

b) Az $y = \ln x$ helyettesítéssel, ha $x \to \infty$, akkor $y \to \infty$. Így

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{\ln x + 1} - \sqrt{\ln x - 1} = \lim_{y\to\infty} \sqrt{y + 1} - \sqrt{y - 1} =$$
$$= \lim_{y\to\infty} \frac{2}{\sqrt{y + 1} + \sqrt{y - 1}} = 0.$$

c) Az $y = e^x$ helyettesítéssel, ha $x \to -\infty$, akkor $y \to 0^+$. Így

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{e^{2x} + 4} - 2}{e^x} = \lim_{y\to 0^+} \frac{\sqrt{y^2 + 4} - 2}{y} = \lim_{y\to 0^+} \frac{(y^2 + 4) - 2^2}{y(\sqrt{y^2 + 4} + 2)} =$$
$$= \lim_{y\to 0^+} \frac{y}{\sqrt{y^2 + 4} + 2} = \frac{0}{\sqrt{4} + 2} = 0$$

d) Az $y = -\ln x$ helyettesítéssel, ha $x \to 0^+$, akkor $y \to \infty$. Így

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln^3 x + 2\ln x - 1}{\ln^2 x + 2\ln^3 x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(-y)^3 + 2(-y) - 1}{(-y)^2 + 2(-y)^3} =$$
$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-y^3 - 2y - 1}{y^2 - 2y^3} =$$
$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-1 - 2\frac{1}{y^2} - \frac{1}{y^3}}{\frac{1}{y} - 2} = \frac{1}{2}.$$

e) Az $y = \operatorname{tg} x$ helyettesítéssel, ha $x \to \frac{\pi}{2}^-$, akkor $y \to \infty$. Így

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\operatorname{tg}^2 x + 1}{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x} = \lim_{y\to\infty} \frac{y^2 + 1}{y - y^2} = \lim_{y\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{y^2}}{\frac{1}{y} - 1} = -1.$$

f) Az $y = -\operatorname{tg} x$ (azaz $\operatorname{tg} x = -y$) helyettesítéssel, ha $x \to \frac{\pi}{2}^+$, akkor $y \to \infty$. Így

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \frac{\operatorname{tg}^2 x + 1}{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x} = \lim_{y\to\infty} \frac{(-y)^2 + 1}{-y - (-y)^2} = \lim_{y\to\infty} \frac{y^2 + 1}{-y - y^2} =$$
$$= \lim_{y\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{y^2}}{-\frac{1}{y} - 1} = -1.$$

g) Az $y = \frac{1}{x}$ helyettesítéssel, ha $x \to \infty$, akkor $y \to 0$. Így

$$\lim_{x\to\infty} x \sin\frac{1}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1.$$

h) Az $y = \operatorname{arctg} x$ (azaz $x = \operatorname{tg} y$) helyettesítéssel, ha $x \to \infty$, akkor $y \to \frac{\pi}{2}^-$. Így

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right) = \lim_{y\to\frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} y \left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \lim_{y\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin y}{\cos y}\left(\frac{\pi}{2} - y\right).$$

A $z = \frac{\pi}{2} - y$ helyettesítéssel, ha $y \to \frac{\pi}{2}^-$, akkor $z \to 0^-$. Így

$$\lim_{y\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin y}{\cos y}\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \lim_{z\to 0^-} \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - z)}{\cos(\frac{\pi}{2} - z)} z = \lim_{z\to 0^-} \frac{\cos z}{\sin z} z =$$
$$= \lim_{z\to 0^-} \cos z \cdot \left(\lim_{z\to 0^-} \frac{\sin z}{z}\right)^{-1} =$$
$$= 1 \cdot 1^{-1} = 1.$$

Ezért a keresett határérték 1-gyel egyenlő.

A „Határértékszámítás” című tananyagban bevezettük az e szám fogalmát mint az
$$e := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n .$$
Tudunk-e ebből következtetni, hogy létezik az
$$f\colon]0,\infty[\to \mathbf{R}, \qquad f(x) := \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$
függvény határértéke a végtelenben, és ez az e számmal egyenlő? A 29. Tétel értelmében elegendő lenne igazolni, hogy az f függvény monoton növekvő. Abban a tananyagban szintén igazoltuk, hogy az
$$a_n := \left(1+\frac{a}{n}\right)^n$$
sorozat szigorúan monoton növekvő, ha $a > 0$. Ez azt jelenti, hogy minden $n < m$ pozitív egész szám esetén
$$\left(1+\frac{a}{n}\right)^n < \left(1+\frac{a}{m}\right)^m . \tag{5}$$
Legyen $r_1 < r_2$ két tetszőleges pozitív racionális szám, és írjuk fel őket
$$r_1 := \frac{p_1}{q_1} \qquad \text{és} \qquad r_2 := \frac{p_2}{q_2}$$
alakban, ahol p_1, p_2, q_1, q_2 pozitív egész számok. Mivel $r_1 < r_2$, így $p_1q_2 < p_2q_1$. Legyen $n := p_1q_2$, $m := p_2q_1$ és $a := q_1q_2$. Mivel $n < m$, így (5) miatt
$$\left(1+\frac{q_1q_2}{p_1q_2}\right)^{p_1q_2} < \left(1+\frac{q_1q_2}{p_2q_1}\right)^{p_2q_1} .$$
Ez pedig könnyen átírható a következő módon
$$\left(1+\frac{1}{\frac{p_1}{q_1}}\right)^{\frac{p_1}{q_1}} < \left(1+\frac{1}{\frac{p_2}{q_2}}\right)^{\frac{p_2}{q_2}} ,$$
azaz $f(r_1) < f(r_2)$, ami azt jelenti, hogy az f függvény szigorúan monoton növekvő a racionális számok halmazán. A monotonitás kiterjesztéséhez a valós számok halmazára alkalmazni fogjuk az f függvény folytonosságát. Ez utóbb az
$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^{x\ln(1+\frac{1}{x})}$$
átalakításból következik az összetett függvény folytonossága szerint. Legyen tehát $x < y$ két tetszőleges pozitív valós szám, és válasszunk két olyan z_1, z_2 racionális számot, amire $x < z_1 < z_2 < y$ teljesül. Legyen $r_n \to x$ és $q_n \to y$ két olyan racionális számokból álló sorozat, amire
$$x < r_n < z_1 < z_2 < q_n < y$$

teljesül minden $n \in \mathbf{N}$ esetén. A folytonosság miatt $f(r_n) \to f(x)$ és $f(q_n) \to f(y)$. Ekkor az f függvény racionális számokon történő monotonitása miatt

$$f(x) \leftarrow f(r_n) < f(z_1) < f(z_2) < f(q_n) \to f(y).$$

Így $f(x) \leq f(z_1) < f(z_2) \leq f(y)$, azaz $f(x) < f(y)$. Ezzel igazoltuk, hogy az f függvény szigorúan monoton növekvő, és így a 29. Tétel szerint

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

A fenti eredményből igazolni tudjuk, hogy minden a valós szám esetén

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a$$

teljesül. A fenti állítás nyilvánvaló $a = 0$ esetén. Legyen $a > 0$. Ekkor az $y = \frac{x}{a}$ helyettesítéssel, ha $x \to \infty$, akkor $y \to \infty$. Így

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x}{a}}\right)^{\frac{x}{a}}\right]^a = \lim_{y\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right]^a = e^a.$$

Végül, ha $a < 0$ jelölje $b = -a > 0$. Ekkor az $y = x - b$ helyettesítéssel, ha $x \to \infty$, akkor $y \to \infty$. Így

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x &= \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{b}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-b}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-b}\right)^{-x} = \\ &= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{b}{x-b}\right)^{-x} = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{b}{y}\right)^{-y-b} = \\ &= \lim_{y\to\infty}\left[\left(1+\frac{b}{y}\right)^y\right]^{-1}\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{b}{y}\right)^{-b} = \\ &= (e^b)^{-1}\cdot 1 = e^{-b} = e^a.\end{aligned}$$

10. Feladat. *Határozzuk meg a következő határértékeket!*

a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$, *b)* $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{x}}$,

c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x^2}\right)^{3x^2}$, *d)* $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}(1+\operatorname{ctg} x)^{\operatorname{tg} x}$.

Megoldás:

a) Az $y = -x$ helyettesítéssel, ha $x \to -\infty$, akkor $y \to \infty$. Így

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y\to\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{y}\right)^y\right]^{-1} = (e^{-1})^{-1} = e$$

b) Külön megvizsgáljuk a bal-és jobboldali határértéket. Az $y = \frac{1}{x}$ helyettesítéssel, ha $x \to 0^+$, akkor $y \to \infty$. Így

$$\lim_{x\to 0^+} (1+3x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to\infty} \left(1+\frac{3}{y}\right)^y = e^3.$$

Az $y = -\frac{1}{x}$ helyettesítéssel, ha $x \to 0^-$, akkor $y \to \infty$. Így

$$\lim_{x\to 0^-} (1+3x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to\infty} \left(1-\frac{3}{y}\right)^{-y} = \lim_{y\to\infty} \left[\left(1-\frac{3}{y}\right)^y\right]^{-1} = (e^{-3})^{-1} = e^3.$$

Ezért a keresett határérték e^3-nal egyenlő.

c) Az $y = x^2$ helyettesítéssel, ha $x \to \infty$, akkor $y \to \infty$. Így

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{5}{x^2}\right)^{3x^2} = \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{5}{y}\right)^{3y} = \lim_{x\to\infty} \left[\left(1+\frac{5}{y}\right)^y\right]^3 = (e^5)^3 = e^{15}.$$

d) Az $y = \operatorname{tg} x$ helyettesítéssel, ha $x \to \frac{\pi}{2}^-$, akkor $y \to \infty$. Így

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} (1+\operatorname{ctg} x)^{\operatorname{tg} x} = \lim_{y\to\infty} \left(1+\frac{1}{y}\right)^y = e.$$

A 5. Rész végén igazoltuk, hogy minden egyenletesen folytonos függvénynek létezik pontbeli határértéke az értelmezési tartományának minden torlódási pontjában. Érdekes, hogy hasonló állítás nem mondható ki, ha kiterjesztett torlódási pontról van szó, azaz ha a végtelenben vagy mínusz végtelenben nézzük a határértéket. Például az

$$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \qquad f(x) = x$$

függvény egyenletesen folytonos, de a végtelenben vett határértéke ∞, azaz nem létezik. Látni fogjuk, hogy inkább az állítás megfordítása igaz.

33. Tétel. *Ha $f\colon [a,\infty[\to \mathbf{R}$ egy folytonos függvény, ahol $a \in \mathbf{R}$, és létezik a határértéke a végtelenben, akkor f egyenletesen folytonos függvény.*

Bizonyítás. Jelölje $A \in \mathbf{R}$ a függvény a végtelenben vett határértékét és legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. A végtelenben vett határérték definíciójából

$$\exists k > a,\ \text{hogy ha } x \ge k,\ \text{akkor } |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{6}$$

Másrészt f folytonos függvény, ezért a Heine-tétel szerint egyenletesen folytonos az $[a,k]$ zárt intervallumon. Ekkor az egyenletes folytonosság definíciója szerint $\exists\delta > 0$, hogy ha

$$a \le x < y \le k \text{ és } |x-y| < \delta,\ \text{akkor } |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{7}$$

Legyen most $a \le x < y$ két olyan szám, amire $|x - y| < \delta$ teljesül. Ekkor három eset lehetséges.

- Ha $a \le x < y \le k$, akkor (6)-ból következik, hogy
$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$
- Ha $a \le x \le k < y$, akkor (6)-ból következik, hogy $|f(x) - f(k)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Másrészt (7)-ből következik, hogy $|f(k) - A| < \frac{\varepsilon}{3}$ és $|f(y) - A| < \frac{\varepsilon}{3}$. Ezért
$$|f(x) - f(y)| \le |f(x) - f(k)| + |f(k) - A| + |f(y) - A| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$
- Ha $k < x < y$, akkor (7)-ből következik, hogy $|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{3}$, illetve $|f(y) - A| < \frac{\varepsilon}{3}$. Ezért
$$|f(x) - f(y)| \le |f(x) - A| + |f(y) - A| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

Mindhárom esetben
$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon,$$
ami azt jelenti, hogy az f függvény egyenletesen folytonos az $[a, \infty[$ intervallumon. Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

Szeretném megjegyezni, hogy hasonló módon minden $[-\infty, a]$ intervallumon értelmezett folytonos függvény egyenletesen folytonos is, ha létezik a határértéke a mínusz végtelenben. Ez az előző tételből következik, ha állítását az $f(-x)$ függvényre alkalmazzuk. A két állításból következik, hogy a teljes valós számok halmazán értelmezett folytonos függvény egyenletesen folytonos is, ha létezik a határértéke a végtelenben és a mínusz végtelenben. Ilyen például az
$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \qquad f(x) = \operatorname{arctg} x$$
függvény.

9. Feladatok

11. Feladat. A definició alapján igazoljuk a következő függvények folytonosságát a megadott pontban!

1. $f(x) := x^3, \quad x_0 = -1,$
2. $f(x) := \sqrt{x}, \quad x_0 = 4,$
3. $f(x) := x^2 - x, \quad x_0 = 1,$
4. $f(x) := x^2 + 2x - 1, \quad x_0 = -1,$
5. $f(x) := \dfrac{x+2}{x-1}, \quad x_0 = 0,$
6. $f(x) := \dfrac{2x-1}{x+1}, \quad x_0 = 2.$

12. Feladat. A következő függvényeket a lehetséges legbővebb halmazokon értelmezzük. Melyik pontban (balról vagy jobbról) folytonosak ezek a függvények?

1. $f(x) := \dfrac{x}{|x|-1},$
2. $f(x) := \dfrac{x}{\operatorname{sign}^2 x - 1}$
3. $f(x) := \left[x - \dfrac{1}{2}\right],$
4. $f(x) := [1-x],$
5. $f(x) := x[x],$
6. $f(x) := \dfrac{x}{[x]},$
7. $f(x) := \{x\},$
8. $f(x) := \{x\} + \{1-x\},$
9. $f(x) := [x] + \{x\},$
10. $f(x) := [x] - \{x\},$
11. $f(x) := x \operatorname{sign}(x^2 - 2x),$
12. $f(x) := \operatorname{sign}(x^2 - 3x) - \operatorname{sign}(x^2 - 2x),$
13. $f(x) := \operatorname{sign}(x^3 + x),$
14. $f(x) := |x-1| \operatorname{sign}(x^3 - x),$
15. $f(x) := \begin{cases} |x|, & \text{ha } x \in \mathbf{Q}, \\ 1 - |x|, & \text{ha } x \notin \mathbf{Q}, \end{cases}$
16. $f(x) := \begin{cases} x^3 - 2x^2 + 1, & \text{ha } x \in \mathbf{Q}, \\ 2x^2 - 3x + 1, & \text{ha } x \notin \mathbf{Q}. \end{cases}$

A feladatban $[x]$ az x szám egész részét, illetve $\{x\}$ az x szám törtrészét jelenti.

13. Feladat. Legyen $H \subseteq \mathbf{R}$, $x_0 \in H$, és $f, g \colon H \to \mathbf{R}$. Igazoljuk, hogy ha f folytonos az x_0 pontban, $f(x_0) = 0$ és g korlátos, akkor az fg folytonos az x_0 pontban!

14. Feladat. Legyen $H \subseteq \mathbf{R}$, $x_0 \in H$ és $f \colon H \to \mathbf{R}$. Igazoljuk, hogy ha f folytonos az x_0 pontban akkor $|f|$ is folytonos az x_0 pontban! Igaz-e az állítás megfordítása?

15. Feladat. Legyen f egy valós függvény, és jelölje

$$f^+(x) := \begin{cases} f(x) & \text{ha } f(x) > 0, \\ 0 & \text{ha } f(x) \le 0, \end{cases}, \qquad f^-(x) := \begin{cases} -f(x) & \text{ha } f(x) < 0, \\ 0 & \text{ha } f(x) \ge 0, \end{cases}$$

a függvény pozitív és negatív részét. Igazoljuk, hogy ha f folytonos, akkor a függvény pozitív és negatív része is folytonos!

16. Feladat. Legyen $H \subseteq \mathbf{R}$, valamint $f, g\colon H \to \mathbf{R}$. Igazoljuk, hogy ha f és g folytonos függvény, akkor az $F, G\colon H \to \mathbf{R}$,

$$F(x) := \max\{f(x), g(x)\}, \qquad G(x) := \min\{f(x), g(x)\}$$

függvények is folytonosak!

17. Feladat. Legyen $H \subseteq \mathbf{R}$, $x_0 \in H$, és $f\colon H \to \mathbf{R}$. Igazoljuk, hogy ha f folytonos az x_0 pontban, és minden $r > 0$ esetén a $K(x_0, r)$ környezet tartalmaz olyan x_1 és x_2 H-beli elemet, hogy $f(x_1) < 0$ és $f(x_2) > 0$, akkor $f(x_0) = 0$.

18. Feladat. Adjunk példát olyan nem folytonos invertálható függvényre, amelynek inverze folytonos!

19. Feladat. Igazoljuk, hogy ha $f\colon [a, b] \to \mathbf{R}$ egy monoton függvény, amely minden $f(a)$ és $f(b)$ közé eső értéket felvesz, akkor f folytonos függvény!

20. Feladat. Igazoljuk, hogy ha $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ egy monoton függvény, amely minden racionális értéket felvesz, akkor f folytonos függvény!

21. Feladat. Igazoljuk, hogy egy intervallumon értelmezett folytonos függvény értékkészlete is intervallum!

22. Feladat. Igazoljuk, hogy ha $f\colon [a, b] \to \mathbf{R}$ egy folytonos függvény, akkor minden $x_k \in [a, b]$, $k = 1, 2, \ldots n$ ($n \in \mathbf{N}$) esetén létezik olyan $\xi \in [a, b]$, hogy

$$f(\xi) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k).$$

23. Feladat. Igazoljuk, hogy ha $f\colon [a, b] \to [a, b]$ egy folytonos szürjektív függvény, akkor létezik olyan $\xi \in [a, b]$, hogy $f(\xi) = \xi$!

24. Feladat. Melyek azok a függvények, amelyek egy zárt $[a, b]$ intervallumon értelmezettek és ennek minden nem üres részhalmazán van legkisebb és legnagyobb elemük?

25. Feladat. Adjunk meg olyan függvényt, amely valamennyi pontja egyetlen környezetében sem korlátos!

26. Feladat. Igazoljuk, hogy ha az $f\colon [a, b] \to]0, \infty[$ függvény folytonos van olyan $\varepsilon > 0$, hogy $f(x) > \varepsilon$ minden $x \in [a, b]$ esetén! Igaz-e az állítás, ha a függvény értékkészlete egy nyílt intervallum?

27. Feladat. Igazoljuk, hogy minden harmadfokú polinomnak van valós gyöke!

28. Feladat. Igazoljuk, hogy ha $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ egy nemkonstans, folytonos és periodikus függvény, akkor létezik legkisebb periódusa!

29. Feladat. Legyen $f\colon H \to \mathbf{R}$ egy valós függvény, valamint $A \subseteq H$. Igazoljuk, hogy ha f egyenletesen folytonos a H halmazon, akkor f az A halmazra való leszűkítése is egyenletesen folytonos függvény!

30. Feladat. Döntsük el, hogy egyenletesen folytonosak-e a következő függvények a megadott halmazon!

1. $f(x) := x^4, \qquad x \in]-1,1],$
2. $f(x) := x^3, \qquad x \in [0,\infty[,$
3. $f(x) := \sqrt{x}, \qquad x \in]0,1[,$
4. $f(x) := 3x-1, \qquad x \in \mathbf{R},$
5. $f(x) := \dfrac{1}{x+1}, \qquad x \in]0,\infty[,$
6. $f(x) := \sin x, \qquad x \in \mathbf{R}.$

31. Feladat. Adjunk példát olyan folytonos korlátos függvényre, amely nem egyenletesen folytonos!

32. Feladat. Igazoljuk, hogy minden monoton, folytonos és korlátos függvény egyenletesen folytonos!

33. Feladat. Igazoljuk, hogy egyenletesen folytonos függvények összege és konstans-szorosa egyenletesen folytonos, de szorzatuk nem feltétlenül az!

34. Feladat. Igazoljuk, hogy az

$$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \qquad f(x) := x^k$$

függvény eleget tesz a Lipschitz-féle feltételnek minden korlátos halmazon, ahol k egy tetszőleges pozitív szám!

35. Feladat. Igazoljuk, hogy az

$$f\colon [0,\infty] \to \mathbf{R}, \qquad f(x) := x^k$$

függvény eleget tesz a Lipschitz-féle feltételnek minden $[a,b]$ intervallumon, ahol $a < b$ tetszőleges pozitív számok!

36. Feladat. Igazoljuk, hogy Lipschitz-féle feltételt teljesítő függvények összege és konstans-szorosa is teljesíti a Lipschitz-féle feltételt, illetve a szorzatuk is teljesíti, ha korlátos halmazon vannak értelmezve!

37. Feladat. Határozzuk meg a következő határértékeket!

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5x^6 + x^4 - 3x^2}{x^4 + 3x^2}$,
2. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{4x^8 - 2x^5 - x^3 - 1}{x^4 - 1}$,
3. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3 + 1}{x^4 + 2x^2 - 3}$,
4. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 + x - 3}{2x^2 - 3x - 2}$,
5. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3 + 8}{x + 2}$,
6. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 8x + 15}$,
7. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^8 - 1}{x^7 - 1}$,
8. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{1 - x} - \dfrac{3}{1 - x^3}$,
9. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2}{1 - x^2} - \dfrac{3}{1 - x^3}$,
10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{9 + x^2} - 3}{x^2 + x}$,
11. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}$,
12. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\sqrt{6 + x} - 2}{x + 2}$,
13. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$,
14. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{3x + 1} - 2}{x^2 - 1}$,
15. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sqrt{2x + 4} - 2}$,
16. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x + 1} - 1}{x}$,
17. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2x + 1} - \sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{1 + x} - 1}$,
18. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{1 - 3x} - 2}{1 + \sqrt[3]{x}}$,
19. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 7x}{2x}$,
20. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin 5x}{\sin x}$,
21. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 5x}{\sin 2x}$,
22. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} 4x}$,
23. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^3 4x}{x^3}$,
24. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x}$,
25. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{\cos x} - 1}{x^2}$,
26. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$,
27. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$,
28. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) \operatorname{tg} x$,
29. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{\cos x} - 1}{x^2}$,
30. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$,
31. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin 2x}{\cos x}$,
32. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin^2 2x}{1 - \sin x}$,
33. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin 2x}{\sin 4x}$,
34. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$.

38. Feladat. Legyen $H \subseteq \mathbf{R}$, valamint x_0 torlódási pontja a H halmaznak. Igazoljuk, hogy ha az $f\colon H \to \mathbf{R}$ valós függvénynek van határértéke az x_0 pontban, akkor az $|f|$ függvénynek is van határértéke az x_0 pontban és

$$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = \left| \lim_{x \to x_0} f(x) \right|.$$

39. Feladat. Adjunk meg olyan f függvényt, amelynek valamely pontjában nem létezik határértéke, de ott az $|f|$ függvénynek van határértéke!

40. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy a Dirichlet-féle függvénynek nincs olyan pontja, ahol létezik határértéke!

41. Feladat. A Riemann-féle függvény függvényt a következő módon értelmezzük

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \text{ irracionális} \\ \frac{1}{q} & \text{ha } x = \frac{p}{q},\ \text{ahol } p, q \in \mathbf{Z},\ q > 0,\ (p, q) = 1. \end{cases}$$

Igazoljuk, hogy

a) az f függvénynek létezik határértéke minden pontban, és ez nullával egyenlő.

b) az f függvény folytonos minden irracionális helyen.

c) az f függvény nem folytonos egyik racionális helyen sem.

42. Feladat. Tegyük fel, hogy az $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvénynek létezik határértéke minden értelmezési tartománybeli pontjában és jelölje

$$h(x) := \lim_{t \to x} f(t) \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Igazoljuk, hogy a h függvény folytonos a valós számok halmazán!

43. Feladat. Igazoljuk, hogy nincs olyan $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény, amelynek minden pontjában végtelen a határértéke!

44. Feladat. Igazoljuk, hogy ha az $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvénynek minden pontjában nulla a határértéke, akkor van olyan x pont, ahol $f(x) = 0$.

45. Feladat. Legyen $H \subseteq \mathbf{R}$, valamint x_0 torlódási pontja a H halmaznak. Igazoljuk, hogy ha az $f\colon H \to \mathbf{R}$ valós függvénynek van határértéke az x_0 pontban, akkor van az x_0-nak olyan K környezete, hogy f a $H \cap K$ halmazra való leszűkítése korlátos függvény!

46. Feladat. Adjunk meg olyan $f, g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ valós függvényeket, amelyek eleget tesznek a következő feltételeknek: a g függvénynek van határértéke egy adott x_0 pontban és ez y_0-val egyenlő, az f függvénynek van határértéke az y_0 pontban és ez z_0-val egyenlő. Továbbá

(a) az $f \circ g$ függvénynek van határértéke az x_0 pontban, de ez nem egyenlő z_0-val,

(b) az $f \circ g$ függvénynek nem létezik határértéke az x_0-ban.

47. Feladat. Indokolja meg miért nem léteznek a következő határértékek!

1. $\lim\limits_{x\to 1} [x]$,
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{[x]}{x}$,
3. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{|1-x^2|}{1+x}$,
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-3x}{|x|}$,
5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+1}{x}$,
6. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x}{x^2-3x+2}$,
7. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x^2-2x+1}$,
8. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-2x^2+x-2}{x^3-4x^2+4x}$,
9. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{2}{1+2^{\frac{1}{x+2}}}$,
10. $\lim\limits_{x\to 3} \operatorname{arctg} \dfrac{x^2}{x-3}$,
11. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sin(x-2)}{|x^3-8|}$,
12. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x(x-1)}{|x|(x+1)}$.

48. Feladat. Határozzuk meg a következő határértékeket!

1. $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sign}^2 x$,
2. $\lim\limits_{x\to 0} [x] + [-x]$,
3. $\lim\limits_{x\to 1} e^{\frac{1}{|x-1|}}$,
4. $\lim\limits_{x\to 2} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{(x-2)^2}$,
5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{\sqrt[3]{x}}$,
6. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{(\sin|x+2|)|x^2-4|}{x^3+4x^2+4x}$.

49. Feladat. Legyen $H \subseteq \mathbf{R}$ olyan halmaz, amire minden $x \in H$ esetén $-x \in H$ is teljesül, valamint x_0 torlódási pontja a H halmaznak. Igazoljuk, hogy ha az $f\colon H \to \mathbf{R}$ páros függvénynek van határértéke az x_0 pontban, akkor létezik határértéke a $-x_0$ pontban és

$$\lim_{x\to -x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x).$$

Fogalmazzuk meg és igazoljuk az állítás megfelelőjét páratlan függvények esetén!

50. Feladat. Fogalmazzuk meg és igazoljuk az előző állítás megfelelőjét bal- és jobboldali határérték esetén!

51. Feladat. Legyen $f\colon H \to \mathbf{R}$ egy páros függvény és $x_0 = 0$ torlódási pontja a H halmaznak. Bizonyítsuk be, hogy ha az f függvénynek elsőfajú szakadása van az $x_0 = 0$ pontban, akkor ott létezik a függvénynek határértéke!

52. Feladat. Legyen $H \subseteq \mathbf{R}$ és x_0 torlódási pontja a H halmaznak. Igazoljuk, hogy ha az $f, g\colon H \to \mathbf{R}$ függvényeknek van határértéke az x_0 pontban, és van az x_0 pontnak olyan K környezete, hogy $f(x) \leq g(x)$ minden $x \in K \cap H$ esetén, akkor

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g(x).$$

Igaz-e az állítás megfordítása?

53. Feladat. (Rendőr-elv) Legyen $H \subseteq \mathbf{R}$, x_0 torlódási pontja a H halmaznak és $f, g, h\colon H \to \mathbf{R}$ valós függvények. Igazoljuk, hogy ha az f és g függvényeknek létezik határértéke az x_0 pontban és

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) =: A,$$

továbbá van az x_0 pontnak olyan K környezete, hogy

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x) \qquad (x \in K \setminus \{x_0\}),$$

akkor a h függvénynek létezik határértéke az x_0 pontban és

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = A.$$

54. Feladat. Adjunk meg olyan $f\colon [0,1] \to [0,1]$ függvényt, amely monoton és végtelen sok szakadási helye van!

55. Feladat. Igazoljuk, hogy minden valós függvény elsőfajú szakadási helyeinek halmaza megszámlálható!

56. Feladat. Igazoljuk, hogy ha egy valós függvénynek minden racionális pontban elsőfajú szakadási helye van, akkor van olyan irracionális pont, ahol a függvény folytonos!

57. Feladat. Állapítsuk meg milyen típusú szakadási helyei vannak a következő függvényeknek!

a) $$f(x) = \begin{cases} \sin 2x & \text{ha } x < 0, \\ e^x & \text{ha } x \geq 0, \end{cases}$$

b) $$f(x) = \begin{cases} -x & \text{ha } x \leq -1, \\ 3 & \text{ha } x = 1, \\ \dfrac{x^3-1}{x-1} & \text{egyébként}, \end{cases}$$

c) $$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{ha } x < 0, \\ x & \text{ha } 0 \leq x \leq 2, \\ \dfrac{1}{x-2} & \text{ha } x > 2, \end{cases}$$

d) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{ha } x < 0, \\ \ln x & \text{ha } 0 < x \leq 1, \\ 2x-2 & \text{ha } x > 1, \end{cases}$$

e) $$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x = 0, \\ 1 & \text{ha } |x| = 3, \\ \dfrac{x^3-3x^2}{|x|(x^2-9)} & \text{egyébként}, \end{cases}$$

f) $$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x-1} & \text{ha } x < 1, \\ \dfrac{2\sin(x-1)}{x^2-1} & \text{ha } 1 < x < 2, \\ x^2 & \text{egyébként}, \end{cases}$$

g) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x^2-3x+3)\sin|x+1|}{x^2-1} & \text{ha } |x| \neq 1, \\ 0 & \text{ha } |x| = 1, \end{cases}$$

h) $$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{4}{x^2} & \text{ha } x \neq 0, \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{ha } x = 0, \end{cases}$$

i) $$f(x) = \begin{cases} x^3+2x & \text{ha } x \text{ racionális szám}, \\ 3x^2 & \text{ha } x \text{ irracionális szám}. \end{cases}$$

j) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(-1)^q p}{q+1} & \text{ha } x = \dfrac{p}{q} \text{ racionális szám}, \\ 0 & \text{ha } x \text{ irracionális szám}. \end{cases}$$

58. Feladat. Határozzuk meg a paramétereket úgy, hogy az alábbi függvények folytonosak legyenek!

$$\text{a)}\quad f(x) = \begin{cases} ax+1 & \text{ha } x \le 2, \\ \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{ha } x > 2, \end{cases}$$

$$\text{b)}\quad f(x) = \begin{cases} x^3+x & \text{ha } x \le a, \\ -x^2 & \text{ha } x > a, \end{cases}$$

$$\text{c)}\quad f(x) = \begin{cases} e^{\frac{2}{x-1}} & \text{ha } x < 1, \\ x^2-a & \text{ha } 1 \le x \le 2, \\ \dfrac{\sin|x-2|}{x^3-8}+bx & \text{ha } x > 2. \end{cases}$$

59. Feladat. Határozzuk meg a következő határértékeket!

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} 3x^5+x^3-3x^2+1,$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^6+2x^3-x+2,$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3+2x-1}{x^2-x^3},$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-5x+3}{2x^2+x},$
5. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^4+x^2-1}{x^3-1},$
6. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+6}{x^3+3x^2+2},$
7. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+2x}+x}{x+2},$
8. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3-x}{x+\sqrt{1-x}},$
9. $\lim\limits_{x\to-\infty} x(\sqrt[3]{x^3-x}+x),$
10. $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1},$
11. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3\cdot 2^x+3^x}{3^{x+1}+1},$
12. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2^{2x+1}+2\cdot 3^x}{3^x+4^x},$
13. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{x+2}{x-3}\right)^x,$
14. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{2x+1}.$

60. Feladat. Legyen $H \subseteq \mathbf{R}$ olyan halmaz, amely sem alulról, sem felülről nem korlátos és $f\colon H \to \mathbf{R}$ egy olyan periodikus függvény, amely nem állandó. Igazoljuk, hogy az f függvénynek nem létezik határértéke a végtelenben!

61. Feladat. Legyen $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ olyan valós függvény, amelyre igaz, hogy az $y_n := f(x_n)$ sorozatnak van határértéke, ha $x_n \to \infty$ és

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \to \infty.$$

Igazoljuk, hogy a függvénynek létezik határértéke a végtelenben!

62. Feladat. Határozzuk meg a következő határértékeket!

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^2 x + 1}{e^4 x + e^x}$,
2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\log_2^3 x + \log_3^2 x}{\ln^3 x + 1}$,
3. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln^2 x + 2\ln x}{1 - \ln^2 x}$,
4. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$,
5. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^{10} + 3} - 2}{x^{10} - 1}$,
6. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{e^{2x} + 1} - 1}{e^x + 1}$,
7. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2^{2^x} + (-2)^{2^x}}{3^{2^x} + 1}$,
8. $\lim\limits_{x\to\infty} e^x \sin(e^{-x})$,
9. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin\left(\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{arctg}^2 x - \frac{\pi^2}{4}}$,
10. $\lim\limits_{x\to\infty} \ln\left(\dfrac{x^3 + 1}{x^3}\right)^{x^3}$.

Ajánlott irodalom

[1] Blahota István: *Kalkulus és Maxima*, egyetemi jegyzet, 2011. http://mek.oszk.hu/09800/09846/09846.pdf

[2] Laczkovich Miklós és T. Sós Vera: *Valós analízis I.*, Typotex ekiadó, Budapest, 2012.

[3] Leindler László – Schipp Ferenc: *Analízis I*, Tankönyvkiadó, 1985.

[4] Leindler László: *Analízis*, Polygon, Szeged, 2001.

[5] Rimán János: *Matematikai analízis I*, Liceum, Eger, 2004.

[6] Rimán János: *Matematikai analízis feladatgyűjtemény I-II*, Liceum, Eger, 2004.

[7] Rudin Walter: *A Matematikai analízis alapjai*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978.

[8] Sain Márton: *Nincs királyi út! : Matematikatörténet*, Gondolat Könyvkiadó, Budapest, 1986.

[9] Szabó Tamás: *Kalkulus I. Példatár*, Polygon, Szeged, 2004.

[10] Toledo Rodolfo: *Halmazok, relációk, függvények*, elektronikus tananyag, 2016. http://bit.ly/toledo-tananyag-halmazok

[11] Toledo Rodolfo: *Valós számok*, elektronikus tananyag, 2017. http://bit.ly/toledo-tananyag-valos_szamok

[12] Toledo Rodolfo: *Valós függvények*, elektronikus tananyag, 2018. http://bit.ly/toledo-tananyag-valos_fv

[13] Toledo Rodolfo: *Számsorozatok és tulajdonságaik*, elektronikus tananyag, 2018. http://bit.ly/toledo-tananyag-sorozatok-tulajd

[14] Toledo Rodolfo: *Határértékszámítás*, elektronikus tananyag, 2018. http://bit.ly/toledo-tananyag-hatarszam

Tárgymutató