

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DERIVÁLTJA

TOLEDO RODOLFO



Egyváltozós függvények deriváltja

PDF fájlformátumban megjelent elektronikus tananyag

Szerző: Dr. Toledo Rodolfo Calixto, főiskolai tanár

Nyíregyházi Egyetem

Matematika és Informatika Intézet

Készült: 2019. december 15.

Korrektúra: Bary Anna

Lektorálta: Dr. Blahota István, főiskolai tanár

ISBN 978-615-6032-10-2

Készült az alábbi pályázati projekt támogatásával:

EFOP-3.4.3-16-2016-00018 „Tudásfejlesztés és –hasznosítás a Nyíregyházi Egyetemen”



Szerzői jogok: Jelen tananyag a **Creative Commons: Nevezd meg! – Így add tovább! 4.0 Nemzetközi Licenc (CC BY-SA 4.0)** feltételeinek megfelelően szabadon felhasználható.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	4
2. A differenciálhányados és geometriai jelentése	6
3. A derivált fogalma	13
4. Deriválási szabályok	17
5. Inverzfüggvények differenciálása	27
6. Megoldott vegyes feladatok	32
7. Logaritmikus deriválás	39
8. Esetekből álló függvények deriváltja	41
9. A differenciálhányados fizikai jelentése	47
10. Feladatok	53
Ajánlott irodalom	60
Tárgymutató	61

1. Bevezetés

A differenciálszámítás a matematikai analízis egyik legfontosabb eszköze, mellyel meg tudjuk vizsgálni milyen gyorsan változik a függvény értéke az egyes helyeken, ami egy jóval részletesebb függvénytudományra ad lehetőséget. Segítségével fontos gyakorlati alkalmazhatósággal bíró tulajdonságokat is meghatározhatunk, mint például a függvény monotonitását, szélsőérték helyeit, a függvényhez húzott érintő meredekségét, stb. Ezek olyan fontos alkalmazási területek, melyeknek már az ókorban is komoly hagyományai voltak, igaz akkor még végtelen kicsiny mennyiségekkel, ú.n. infinitezimálisokkal próbáltak számolni. Sőt, még a XVIII. században is olyan módszereket alkalmaztak, melyek mai szemmel nézve nem voltak elég precízek, de ezekkel igazolták a megsejtett eredményeket. Csak a határérték fogalmának tisztázása tette lehetővé a pontos számítások elvégzését.

A modern analízis kialakulása a XVII. században kezdődött Európában. Úgy tanítják, hogy a differenciál- és integrálszámítás egymástól függetlenül Newton és Leibnitz érdeme. A valóságban a differenciálhányados mai, a geometriától független értelmezése egy igen hosszú folyamat eredménye volt, amelyben több matematikus is részt vett. Csak a XIX. században nyerte el a differenciálhányados mai alakját és vált alkalmazhatóvá a függvények általános osztályára d’Alambert, Cauchy és Weierstrass munkája révén.

Jelen tananyag célja, hogy megtanítsa az olvasót, hogyan célszerű az egyváltozós függvény deriváltját kiszámítani, és ehhez precízen tárgyalja a szükséges elméleti ismereteket és gyakorlati módszereket. A benne szereplő elméleti eredmények is ezt a célt szolgálják, ezért kevés szó esik gyakorlati alkalmazásokról. Azonban az itt bemutató szabályok és fogások az alkalmazások alapját képezik, így rendkívül fontos az elsajátításuk.

Ennek ellenére a tananyagot egy gyakorlati problémával, az érintő probléma megoldásával kezdjük. Látni fogjuk, hogyan alakul át az érintő mint geometriai fogalom egy olyan fogalommá, amivel már számolni tudunk. Kiderül, hogy az érintőegyenes meredekségét egy különleges határértékkel fogjuk értelmezni. Ez lesz a differenciálhányados. A függvény határértékkel kapcsolatos ismeretek a „**Folytonos függvények**” című tananyagban kerültek bemutatásra. Az ilyen ismeretek elsajátítása nélkülözhetetlen a differenciálhányados fogalmának megértéséhez.

A tananyag elején a differenciálhányados kiszámításához csak a fogalma áll a rendelkezésünkre. Ezzel illusztráljuk az érintőegyenes „frissen” alkotott definícióját egyszerű függvényeken keresztül, és megoldunk néhány példát a definíció alapján. Kiderül, hogy a folytonosság szükséges, de nem elegendő feltétele a differenciálhatóságnak. Néhány ábra és animáció segíti az ismeretek megértését, a kiválasztott formátum megfelelően működik **Adobe Acrobat Reader** szoftverkörnyezetben. A **3.** Részben már sor kerül a derivált függvény értelmezésére, és a definíció alapján kiszámoljuk a konstans-, a hatvány-, a szinusz és a természetes alapú logaritmus függvény deriváltját.

A következő részben **deriválási szabályokat** alkotunk, amivel az elemi függvényekből véges számú művelet, kompozíció és inverzképzés segítségével jóval hatékonyabban tudjuk a derivált függvényeket meghatározni. Ezután már egyre ritkábban

alkalmazzuk a definíciót. Például a koszinusz, a tangens és kotangens függvény deriváltját is a deriválási szabályok segítségével határozzuk meg. Az exponenciális függvény deriváltját is a logaritmus függvény deriváltjából kapjuk meg az inverzfüggvényre vonatkozó deriválási szabállyal, és ezt a szabályt alkalmazzuk a trigonometrikus függvény inverzeinél is.

Az alapvető szabályok megismerése után kerül sor az alkalmazásukra. A 6. Részben több feladatot oldunk meg, amiken keresztül bemutatjuk a legfontosabb fogásokat. A lényeg az, hogy minden lépés előtt el kell dönteni, melyik szabályt kell alkalmazni, és vele részfeladatokra bontani a feladatot addig, amíg elemi függvényekhez nem jutunk. Ezután foglalkozunk a **logaritmikus deriválással** és az **esetekből álló függvények deriváltjával**.

Végül a 9. Részben bemutatjuk a differenciálhányados jelentését a fizikában. Nem fogunk mélyen belemerülni ebbe a témába, hiszen nagyon eltérnének a tananyag céljától, amely a deriválási fogásokról szól. De szerettük volna érzékeltetni az olvasóval mennyire széles a differenciálszámítás alkalmazási területe még azelőtt, hogy egy következő tananyagban rátérnénk olyan fontos alkalmazásokra, mint a függvényvizsgálat vagy a szélsőértékszámítás. Ezért ebben a részben csak pontszerű testek egyenes pályán történő mozgásával foglalkozunk, és bemutatjuk hogyan alkalmazzuk a differenciálhányadost a pillanatnyi sebesség és gyorsulás fogalmainak megalkotásában.

A tananyag feldolgozásának módszere a már kidolgozott

1. **Halmazok, relációk, függvények** [10]
2. **Valós számok** [11]
3. **Valós függvények** [12]
4. **Számsorozatok és tulajdonságaik** [13]
5. **Határértékszámítás** [14]
6. **Folytonos függvények** [15]

című tananyagokhoz hasonló, azaz a matematikában szokásos négyes tagozódásból áll: definíció, tétel, bizonyítás, alkalmazás (feladatok). A jobb megértést elősegíti, hogy a definíciókat egyszerű példákkal szemléltetjük. A definiált fogalmakra tételeket mondunk ki és precízen bizonyítjuk ezeket. A tananyag teljes elsajátításához több mintafeladatot oldunk meg. Az **utolsó részben** feladatokat tűzünk ki megoldás nélkül, melyek a lehetséges gyakorlati foglalkozások anyagát képezhetik. Megoldásuk előtt javasoljuk a tananyagban megoldott feladatok tanulmányozását és megértését.

A fejezetben **N**, **Z** és **R** szimbólumokkal jelöljük a természetes, egész és valós számok halmazát. Ha külön nem jelöljük, akkor az előforduló betűk (latin, görög) mindig valós számokat jelentenek.

2. A differenciálhányados és geometriai jelentése

Tanulmányainkat az ún. érintő problémával fogjuk elkezdni. Legyen f egy az $]a, b[$ nyílt intervallumon értelmezett valós függvény és x_0 az intervallum egyik pontja. A kérdés az, hogy hogyan határozhatjuk meg az f függvény görbéjéhez az x_0 abszcisszájú pontban húzott érintőegyenes egyenletét.

A fenti kérdés egy másikat vet fel, mégpedig az érintő fogalmát az analízisben. A geometriából olyan intuitív fogalom alakul ki bennünk az érintőről, amely igazán csak olyan speciális görbénél alkalmazható, mint a kör és további másodrendű görbék.

„Érintőegyenes alatt olyan egyértelműen meghatározható egyenest képzelünk el, amelynek egyetlen közös pontja van a görbével, de nem szeli át, hanem a görbe az érintőegyenes ugyanazon félsíkján halad az érintő pont egyik környezetében.”

Egy olyan fogalmat keresünk, amely nagy részben megfelel az előző elképzelésünknek, másrészt precíz, jól alkalmazható analitikus eszközöket tartalmaz, úgyszólván tudunk vele konkrét példákat kiszámolni. Olyan fogalomra van szükségünk, amellyel el tudjuk dönteni, hogy létezik-e az érintő a megadott x_0 abszcisszájú pontban, és ha igen, akkor meghatározhatjuk vele az érintő egyenletét.

Induljunk ki abból a tényből, hogy az (x_0, y_0) ponton átmenő m meredekségű egyenes egyenlete

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0}.$$

Az érintőegyenes az f függvény görbéjét az $(x_0, f(x_0))$ pontban metszi, azaz a fenti képletbe $y_0 = f(x_0)$ kerülhet. Ha még az m meredekséget is ismernénk, akkor fel tudnánk írni az érintő egyenletét. A kérdés az, hogy hogyan tudnánk ezt meghatározni.

Legyen x az $]a, b[$ intervallum egy x_0 -tól különböző pontja és tekintsük azt az egyenest, amely az $(x_0, f(x_0))$ és az $(x, f(x))$ pontokon megy át. Mivel ismerjük az egyenes két pontját, így ki tudjuk számolni a meredekségét. Ez természetesen függ az x érték megválasztásától, és a következő módon jelölhetjük, valamint számolhatjuk ki:

$$F(x) := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (x \in]a, b[, x \neq x_0).$$

A fent értelmezett F függvényt az f függvény x_0 pontra vonatkozó különbség- vagy differenciahányados függvényének nevezzük. Értékei adják az $(x_0, f(x_0))$ és az $(x, f(x))$ pontokon átmenő egyenes meredekségét, és bár általában ez még nem a keresett érintő, ha az x érték elég közel van az x_0 értékéhez, akkor ez az egyenes (az animáció **piros** színű egyenese) majdnem az érintőegyenessel egyezik meg, azaz az $F(x)$ érték nagyon megközelíti az érintőegyenes meredekségét.

Ez a közelítés precíz analitikus eszközökkel írható le, mégpedig a „Folytonos függvények” című tananyagban található függvény pontbeli határértékével.

1. Definíció. Legyen f egy, az $]a, b[$ nyílt intervallumon értelmezett valós függvény és x_0 az intervallum egy belső pontja. Az f függvény az x_0 pontban értelmezett **differenciálhányadosát** az

$$f'(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

összefüggéssel értelmezzük, ha a fenti határérték létezik. Ha az f függvénynek létezik differenciálhányadosa az x_0 pontban, akkor azt is mondjuk, hogy az f függvény **differenciálható** az x_0 pontban.

A fentiek értelmében a következő módon értelmezzük az **érintőegyenes** fogalmát: az f függvény görbéjéhez az x_0 abszcisszájú pontban húzott érintő az az egyenes, ami az $(x_0, f(x_0))$ koordinátájú ponton megy át, és meredeksége az f függvény x_0 pontban értelmezett $f'(x_0)$ differenciálhányadosa, ha ez létezik. Ekkor az érintő egyenlete:

$$f'(x_0) = \frac{y - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Ha az $f'(x_0)$ differenciálhányados nem létezik, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény görbéjéhez nem húzható érintő az x_0 abszcisszájú pontban. Az előző megállapítások adják meg a differenciálhányados geometriai jelentését.

A $h := x - x_0$ helyettesítés bevezetésével a differenciálhányados fogalmában szereplő határérték a következőképpen írható át

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Ez sokszor megkönnyítheti a számításokat.

1. Feladat. A differenciálhányados fogalmának segítségével határozzuk meg az $f(x) = x^2$ függvény görbéjéhez az $x_0 = 1$ abszcisszájú pontban húzott érintő-egyenletét!

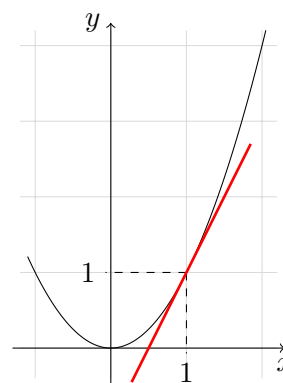
Megoldás: A differenciálhányados fogalma szerint

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2 + h) = 2. \end{aligned}$$

Másrészt $f(1) = 1^2 = 1$, így behelyettesíthetjük ezeket az érintő egyenes egyenletébe:

$$f'(1) = \frac{y - f(1)}{x - 1} \quad \Rightarrow \quad 2 = \frac{y - 1}{x - 1},$$

amiből átrendezés után az $y = 2x - 1$ végeredményt kapjuk.



Érintőt csak olyan pontokban kereshetünk, ahol a függvény folytonos. Ezt mondja ki a következő tételt.

1. Tétel. Ha az f függvény az x_0 pontban differenciálható, akkor ott folytonos is.

Bizonyítás. A következő számítás szerint

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) = \\ &= f'(x_0) \cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

hiszen ha két határérték létezik, akkor szorzatuk határérték a határértékük szorzata. Így

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0),$$

ami azt jelenti, hogy az f függvény folytonos az x_0 pontban. Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

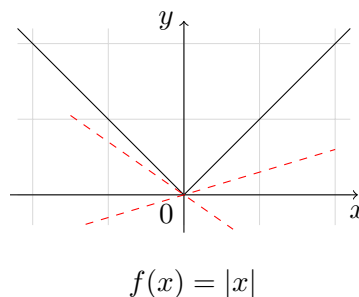
Azonban nem biztos, hogy az érintőegyenés létezik, ha a vizsgált függvény folytonos. Erre jó példa az $f(x) = |x|$ az $x_0 = 0$ pontban.

Vegyük észre, hogy az

$$f(x) = |x|$$

függvény esetében több olyan egyenes létezik, amelynek egyetlen közös pontja van a függvény görbéjével az $x_0 = 0$ pontban, de nem szeli át a görbét. Ez azért lehetséges, mert az

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h}$$



differenciálhányados nem létezik, hiszen a bal- és a jobboldali határértékek nem egyeznek meg, hiszen

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1 \quad \text{és} \quad \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1.$$

A differenciálhányados létezése gyakran a bal- és a jobboldali határértékek egyezésén múlik. Ezért néha érdemes ezeket külön kezelni.

2. Definíció. Legyen $x_0 \in \mathbf{R}$, $b > x_0$ és f egy, az $[x_0, b[$ intervallumon értelmezett valós függvény. Az f függvény x_0 pontban értelmezett **baloldali differenciálhányadosát** az

$$f'_-(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

összefüggéssel értelmezzük, ha a fenti határérték létezik.

3. Definíció. Legyen $x_0 \in \mathbf{R}$, $a < x_0$ és f egy, az $]a, x_0]$ intervallumon értelmezett valós függvény. Az f függvény az x_0 pontban értelmezett **jobboldali differenciálhányadosát** az

$$f'_+(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

összefüggéssel értelmezzük, ha a fenti határérték létezik.

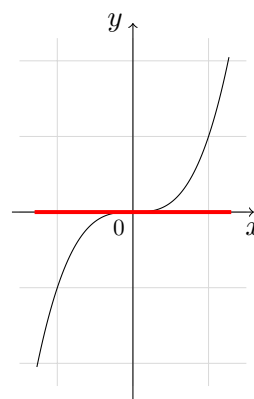
Nyilvánvaló, hogy akkor és csak akkor létezik egy függvény differenciálhányadosa egy pontban, ha ott a bal- és jobboldali differenciálhányadosa létezik, és a kettő megegyezik.

A differenciálhányadossal megadott érintőegyenes fogalma általában rendelkezik a geometriából elvárt tulajdonságokkal, azonban ez nem minden esetben igaz. Valójában az a követelmény, hogy az érintőegyenes nem szelheti át a függvény görbéjét az érintési pont környezetében, az új definíció értelmében nem állja meg mindig a helyét. Ez a helyzet az $f(x) = x^3$ függvény esetében az $x_0 = 0$ abszcisszájú pontban.

Valóban, a differenciálhányados fogalma szerint

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(0+h)^3 - 0^3}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} h^2 = 0. \end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy az érintő meredeksége 0. Mivel az érintő az origón megy át, így az egyenlete $y = 0$ lesz, ami átszeli a függvény grafikonját az origó tetszőleges környezetében.



$$f(x) = x^3$$

2. Feladat. A definíció segítségével döntsek el, hogy differenciálhatók-e az alábbi függvények a megadott pontban! Határozzuk meg a differenciálhányadost, ha létezik!

- | | |
|---|-------------|
| a) $f(x) = 5x^2 - 2x + 1,$ | $x_0 = 2,$ |
| b) $f(x) = \sqrt{x} + 1,$ | $x_0 = 1,$ |
| c) $f(x) = \frac{1}{x},$ | $x_0 = -1,$ |
| d) $f(x) = x x ,$ | $x_0 = 0,$ |
| e) $f(x) = \frac{ x-1 }{x},$ | $x_0 = 1,$ |
| f) $f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{ha } x < 0, \\ x^2 - x + 1 & \text{ha } x \geq 0, \end{cases}$ | $x_0 = 0.$ |

Megoldás: A feladat megoldásában a „Folytonos függvények” című taganyagban bemutatott függvények pontbeli határértékére vonatkozó fogásokat fogjuk alkalmazni.

(a) $f(x) = 5x^2 - 2x + 1, \quad x_0 = 2$

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5(2+h)^2 - 2(2+h) + 1 - (5 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + 1)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5h^2 + 18h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (5h + 18) = 18 \end{aligned}$$

A keresett differenciálhányados létezik, és értéke 18.

$$(b) \quad \boxed{f(x) = \sqrt{x+1}, \quad x_0 = 1}$$

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+h} + 1 - (\sqrt{1} + 1)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+h} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+h} - 1}{h} \cdot \frac{\sqrt{1+h} + 1}{\sqrt{1+h} + 1} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1+h-1}{h(\sqrt{1+h}+1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+h}+1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

A keresett differenciálhányados létezik, és értéke $\frac{1}{2}$.

$$(c) \quad \boxed{f(x) = \frac{1}{x}, \quad x_0 = -1}$$

$$\begin{aligned} f'(-1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{-1+h} - \frac{1}{-1}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1-1+h}{h(h-1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h-1} = -1. \end{aligned}$$

A keresett differenciálhányados létezik, és értéke -1 .

$$(d) \quad \boxed{f(x) = x|x|, \quad x_0 = 0}$$

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(0+h)|0+h| - 0 \cdot |0|}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} |h| = 0. \end{aligned}$$

A keresett differenciálhányados létezik, és értéke 0 .

$$(e) \quad \boxed{f(x) = \frac{|x-1|}{x}, \quad x_0 = 1}$$

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{|1+h-1|}{1+h} - \frac{1-1}{1}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{(1+h)h}$$

Ezért

$$f'_-(1) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{(1+h)h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{(1+h)h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-1}{1+h} = -1,$$

$$f'_+(1) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{(1+h)h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{(1+h)h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{1+h} = 1.$$

Mivel $f'_-(1) \neq f'_+(1)$, így a keresett differenciálhányados nem létezik.

$$(f) \quad f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{ha } x < 0, \\ x^2 - x + 1 & \text{ha } x \geq 0, \end{cases} \quad x_0 = 0$$

Számoljuk ki külön-külön a bal- és jobboldali differenciálhányadost! A függvény megadásából $f(0) = 1$ adódik.

$$f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1 - (0+h) - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1,$$

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(0+h)^2 - (0+h) + 1 - 1}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^2 - h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} h - 1 = -1. \end{aligned}$$

$f'_-(1) = f'_+(1)$, így a keresett differenciálhányados létezik, és értéke -1 .

3. A derivált fogalma

Az előző részben a differenciálhatóságot a függvény egy rögzített x_0 pontjában néztük. E fogalom kiterjeszthető a függvény egészére a következő módon.

4. Definíció. Legyen f egy az $]a, b[$ nyílt intervallumon értelmezett valós függvény és $H \subseteq]a, b[$. Akkor mondjuk, hogy a függvény **differenciálható a H halmazon**, ha minden H -beli pontban differenciálható. Ha minden értelmezési tartománybeli pontban differenciálható, akkor a függvényt differenciálhatónak nevezzük.

5. Definíció. Azt a függvényt, amely minden ponthoz, ahol az f függvény differenciálható, hozzárendeli a pont differenciálhányadosát és a legbővebb halmazon értelmezett, az f függvény deriváltjának nevezzük, és f' -vel jelöljük.

Lássunk egy példát! Határozzuk meg az

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) := x^2$$

függvény deriváltját! Alkalmazzuk a differenciálhányados definícióját! Legyen x egy tetszőleges valós szám. Ekkor

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x. \end{aligned}$$

Ezzel egy újabb függvényt kaptunk, az

$$f': \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad f'(x) = 2x$$

függvényt, amelyet az $f(x) = x^2$ függvényből származtattuk a differenciálhányadosban szereplő határérték meghatározásával egy általános helyzetű pontban, és ezt

$$(x^2)' = 2x$$

módon jelöljük. Ezt nevezük a függvény deriváltjának, amely megadja a függvény görbéjéhez tetszőleges x abszcisszájú pontban húzott érintő meredekségét, ha ez létezik. Az előbbi példában az $f(x) = x^2$ függvény görbéjéhez húzott érintő meredeksége 4, ha az $x = 2$ abszcisszájú pontban nézzük, 6, ha az $x = 3$ pontban, és így tovább.

3. Feladat. Igazoljuk a következő függvények deriváltjainak eredményeit!

- a) Ha $f(x) = c$, akkor $f'(x) = 0$, ahol c egy állandó szám,
 b) Ha $f(x) = x^n$, akkor $f'(x) = nx^{n-1}$, ahol n egy pozitív egész szám,
 c) Ha $f(x) = \sin x$, akkor $f'(x) = \cos x$,
 d) Ha $f(x) = \ln x$, akkor $f'(x) = \frac{1}{x}$.

Megoldás: A megfelelő differenciálhányados kiszámításával oldjuk meg a feladatot.

(a) $f(x) = c$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = 0 \end{aligned}$$

(b) $f(x) = x^n$

A binomiális tétel szerint

$$\begin{aligned} (x+h)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} h^k = \\ &= x^n + nx^{n-1}h + \binom{n}{2} x^{n-2}h^2 + \dots + nxh^{n-1} + h^n. \end{aligned}$$

Ekkor

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(nx^{n-1}h + \binom{n}{2} x^{n-2}h^2 + \dots + nxh^{n-1} + h^n \right) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(nx^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2}h + \dots + nxh^{n-2} + h^{n-1} \right) = \\ &= nx^{n-1}, \end{aligned}$$

hiszen ha $h = 0$, akkor az előző összeg minden tagja nulla az első tag kivételével.

(c) $f(x) = \sin x$

Az addíciós tétel szerint:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x(\cos h - 1)}{h} + \frac{\cos x \sin h}{h} \right). \end{aligned}$$

Szorozzuk és osszuk az első hányadost $\cos h + 1$ -gyel! Ekkor

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x(\cos^2 h - 1)}{h(\cos h + 1)} + \frac{\cos x \sin h}{h} \right) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(-\frac{\sin x \sin^2 h}{h(\cos h + 1)} + \frac{\cos x \sin h}{h} \right) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(-\sin x \sin h \cdot \frac{\sin h}{h} \cdot \frac{1}{\cos h + 1} + \cos x \cdot \frac{\sin h}{h} \right) = \\ &= -\sin x \cdot 0 \cdot 1 \cdot \frac{1}{1+1} + \cos x \cdot 1 = \\ &= \cos x. \end{aligned}$$

Az előző számításokban a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \sin h = 0, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \cos h = 1$$

határértékeket alkalmaztuk.

(d) $f(x) = \ln x$

A logaritmus

$$\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c} \quad \text{és} \quad k \log_a b = \log_a b^k$$

ismert tulajdonságai alkalmazásával

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \ln \left(\frac{x+h}{x} \right) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \ln \left(1 + \frac{h}{x} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \ln \left(1 + \frac{h}{x} \right)^{\frac{1}{h}} = \lim_{h \rightarrow 0} \ln \left(1 + \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{h}} \right)^{\frac{1}{h}}. \end{aligned}$$

A logaritmus függvény folytonossága miatt ki tudjuk cserélni a limeszt és a logaritmust a fenti kifejezésben, és így

$$f'(x) = \ln \lim_{h \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{h}} \right)^{\frac{1}{h}}.$$

A „Folytonos függvények” című tananyagban igazoltuk a

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{y} \right)^y = e^a \quad (a \in \mathbf{R})$$

nevezetes határértéket. Ezt fogjuk alkalmazni a keresett határérték kiszámításához, de külön vizsgáljuk a bal- és a jobboldali részét. Legyen $a = \frac{1}{x}$. Az $y = \frac{1}{h}$ helyettesítéssel, ha $h \rightarrow 0^+$, akkor $y \rightarrow \infty$, ezért

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{h}} \right)^{\frac{1}{h}} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{y} \right)^y = e^a = e^{\frac{1}{x}}.$$

A baloldali határérték kiszámításához legyen $a = -\frac{1}{x}$. Az $y = -\frac{1}{h}$ helyettesítéssel, ha $h \rightarrow 0^-$, akkor $y \rightarrow \infty$, ezért

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^-} \left(1 + \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{h}} \right)^{\frac{1}{h}} &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \left(1 + \frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{h}} \right)^{\frac{1}{h}} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{y} \right)^{-y} = \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{a}{y} \right)^y \right]^{-1} = [e^a]^{-1} = [e^{-\frac{1}{x}}]^{-1} = e^{\frac{1}{x}}. \end{aligned}$$

Mivel a bal- és jobboldali határérték megegyezik, így a határérték létezik és

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{h}} \right)^{\frac{1}{h}} = e^{\frac{1}{x}}.$$

Így

$$f'(x) = \ln \lim_{h \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{h}} \right)^{\frac{1}{h}} = \ln e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}.$$

4. Deriválási szabályok

A továbbiakban nem folytatjuk azt az utat, hogy a definíció alapján határozzuk meg a függvények deriváltját. Nagyon hosszadalmas lenne, ha mindig így tenénk, ezért egy másik számítási módszert fogunk alkalmazni, ha a függvény előáll elemi függvényekből véges számú művelet, kompozíció (összetett függvény) és inverzképzés segítségével. Célunk az, hogy ún. **deriválási szabályokat** alkossunk, melyekkel véges számú lépés után ki tudjuk számolni az „összetettebb” függvények deriváltját a képletét alkotó elemi függvények deriváltjából. Ilyen módon kikerülünk a differenciálhányados definíciójában szereplő határérték kiszámítását. Amikor egy függvényt **deriválunk**, akkor mindig az előbb említett számítási módszerre gondolunk.

Az első szabály lényegében azt mondja ki, hogy a szorzó konstansokat ki tudjuk emelni a deriválásból.

2. Tétel. Legyen $]a, b[$ egy nyílt intervallum, $f:]a, b[\rightarrow \mathbf{R}$, $c \in \mathbf{R}$ egy konstans és $x \in]a, b[$. Ha az f függvény differenciálható az x pontban, akkor a cf függvény is differenciálható az x pontban és

$$(cf)'(x) = cf'(x).$$

Bizonyítás. A differenciálhányados fogalma alapján

$$\begin{aligned} (cf)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} c \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \\ &= c \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \\ &= cf'(x), \end{aligned}$$

amiből rögtön következik az igazolandó állítás.

Az előző tétel szerint

$$(5x^3)' = 5 \cdot 3x^2 = 15x^2,$$

$$(2 \sin x)' = 2 \cos x,$$

$$(3 \ln x)' = \frac{3}{x},$$

stb. Továbbá általánosíthatjuk vele a logaritmus deriváltját tetszőleges alapú logaritmus esetén.

4. Feladat. Legyen $a > 0$ és $a \neq 1$. Igazoljuk, hogy

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

Megoldás: A logaritmus tulajdonságaiból következik, hogy

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a},$$

ahol $\ln a$ egy konstans, hiszen nem szerepel benne az x változó. Ezért a

2. Tétel szerint a konstans ki tudjuk emelni a deriválásból

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a} \right)' = \frac{1}{\ln a} \cdot (\ln x)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln a}.$$

A következő szabály azt biztosítja, hogy tagokból álló függvényeket tagonként deriválhatjuk.

3. Tétel. Legyen $]a, b[$ egy nyílt intervallum, $f, g:]a, b[\rightarrow \mathbf{R}$ és $x \in]a, b[$. Ha az f és g függvények differenciálhatók az x pontban, akkor az $f + g$ függvény is differenciálható az x pontban és

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x).$$

Bizonyítás. Tudjuk, hogy $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ minden $x \in]a, b[$ esetén. A differenciálhányados fogalma alapján

$$\begin{aligned} (f + g)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f + g)(x + h) - (f + g)(x)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) + g(x + h) - (f(x) + g(x))}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x) + g(x + h) - g(x)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x + h) - g(x)}{h} = \\ &= f'(x) + g'(x), \end{aligned}$$

hiszen két függvény összegének pontbeli határértéke az egyes függvények pontbeli határértékének összegével egyenlő, ha ezek a határértékek léteznek. Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

A fenti szabályok alkalmazásával könnyen megoldható a következő feladat. Deriváljuk az

$$f(x) = 5x^4 + 2 \ln x - 3 \sin x + x - 4$$

függvényt! Vegyük észre, hogy a fenti függvény tagokból áll, és minden tag olyan függvény konstansszorozosa, amelynek már tudjuk a deriváltját. Ezért

$$\begin{aligned} f'(x) &= (5x^4)' + (2 \ln x)' + (-3 \sin x)' + (x)' + (-4)' = \\ &= 5 \cdot 4x^3 + 2 \cdot \frac{1}{x} - 3 \cos x + 1 + 0 = \\ &= 20x^3 + \frac{2}{x} - 3 \cos x + 1. \end{aligned}$$

Szorzó tényezők esetén nem igaz, hogy az eredmény a tényezők deriváltjának szorzata. A szabály az, hogy egy szorzat deriváltja az az összeg, amelynek tagjai az egyik tényező deriváltja megszorozva a másik tényezővel és fordítva.

4. Tétel. Legyen $]a, b[$ egy nyílt intervallum, $f, g:]a, b[\rightarrow \mathbf{R}$ és $x \in]a, b[$. Ha az f és g függvények differenciálhatók az x pontban, akkor az fg függvény is differenciálható az x pontban és

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Bizonyítás. Tudjuk, hogy $(fg)(x) = f(x)g(x)$ minden $x \in]a, b[$ esetén. A differenciálhányados fogalma alapján

$$\begin{aligned} (fg)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(fg)(x+h) - (fg)(x)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x+h) - f(x))g(x+h) + f(x)(g(x+h) - g(x))}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) + f(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \\ &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x). \end{aligned}$$

A fenti számításokban alkalmaztuk a műveletek és a határérték felcserélhetőségéről szóló tételt, illetve azt a tényt, hogy a g függvény folytonos az x pontban, mert ott differenciálható, és így

$$\lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) = g(x).$$

Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

Lássunk egy példát! Deriváljuk az

$$f(x) = (6x^5 + x + e^2) \sin x$$

függvényt! Vegyük észre, hogy a fenti függvény két függvény szorzatából áll! Ezért a függvények szorzatára vonatkozó deriválási szabályt alkalmazzuk.

$$f'(x) = (6x^5 + x + e^2)' \sin x + (6x^5 + x + e^2)(\sin x)'$$

Ezzel sikerült a feladatot két egyszerűbb feladatra visszavezetni. Külön-külön megoldjuk őket és behelyettesítjük az eredményeket a fenti képletbe. Mivel

$$(6x^5 + x + e^2)' = 30x^4 + 1 \quad \text{és} \quad (\sin x)' = \cos x,$$

így behelyettesítés után a feladat megoldása

$$f'(x) = (30x^4 + 1) \sin x + (6x^5 + x + e^2) \cos x.$$

Szeretnénk megjegyezni, hogy az e^2 kifejezést konstansnak kell tekinteni, mert nem tartalmaz x változót, ezért deriváltja 0.

Hányados deriváltja a számláló deriváltja megszorozva a nevezővel mínusz a nevező deriváltja megszorozva a számlalóval, ezt a különbséget elosztjuk a nevező négyzetével.

5. Tétel. Legyen $]a, b[$ egy nyílt intervallum, $f, g:]a, b[\rightarrow \mathbf{R}$ és $x \in]a, b[$. Ha az f és g függvények differenciálhatók az x pontban és $g(x) \neq 0$, akkor az $\frac{f}{g}$ függvény is differenciálható az x pontban és

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Bizonyítás. Tudjuk, hogy $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ minden $x \in]a, b[$ esetén. A differenciálhányados fogalma alapján

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x+h) - \left(\frac{f}{g}\right)(x)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{hg(x+h)g(x)} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+h)}{hg(x+h)g(x)} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x+h) - f(x))g(x) - f(x)(g(x+h) - g(x))}{hg(x+h)g(x)} = \\ &= \frac{1}{g(x)} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{g(x+h)} \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x) - f(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) = \\ &= \frac{1}{g^2(x)} (f'(x)g(x) - f(x)g'(x)). \end{aligned}$$

A fenti számításokban alkalmaztuk a műveletek és a határérték felcserélhetőségéről szóló tételt, illetve azt a tényt, hogy a g függvény folytonos az x pontban, mert ott differenciálható, és így

$$\lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) = g(x).$$

Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

Lássunk egy példát az előbbi hányadosra vonatkozó szabály alkalmazására! Deriváljuk az

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x + 1}{\ln x}$$

függvényt! Vegyük észre, hogy a fenti függvény két függvény hányadosából áll! Ezért az előbbi szabály alapján

$$f'(x) = \frac{(x^3 + 3x + 1)' \ln x - (x^3 + 3x + 1)(\ln x)'}{\ln^2 x}.$$

Most is sikerült a feladatot két egyszerűbb feladatra visszavezetni. Itt is külön-külön megoldjuk őket és behelyettesítjük az eredményeket a fenti képletbe. Mivel

$$(x^3 + 3x + 1)' = 3x^2 + 3 \quad \text{és} \quad (\ln x)' = \frac{1}{x},$$

így behelyettesítés után a feladat megoldása

$$f'(x) = \frac{(3x^2 + 3) \ln x - (x^3 + 3x + 1) \frac{1}{x}}{\ln^2 x}.$$

A fenti eredményen nem szükséges tovább alakítani, így ezt tekinthetjük végeredménynek.

Próbáljuk meg deriválni a

$$h(x) = \sin x^2$$

függvényt! A függvényben szereplő kifejezés nem a szinusz és az x^2 függvény szorzata, hiszen akkor $(\sin x)x^2$ vagy $x^2 \sin x$ módon írnánk. Zárójelek segítségével a függvény

$$h(x) = \sin(x^2)$$

módon írható. Ebből könnyebben lehet látni, hogy h egy összetett függvény, azaz felírható

$$h(x) = f(g(x))$$

formában, ahol $f(x) = \sin x$ a külső és $g(x) = x^2$ a belső függvény.

Az összetett függvényekre egy külön szabályt fogunk megadni, amivel már megoldható az előző példa.

6. Tétel. Legyen $]a, b[$ és $]c, d[$ két nyílt intervallum, valamint $f:]c, d[\rightarrow \mathbf{R}$, $g:]a, b[\rightarrow \mathbf{R}$ és $x \in]a, b[$ olyan pont, hogy $y := g(x)$ eleme a $]c, d[$ intervallumnak. Ha a g függvény az x helyen differenciálható és az f függvény az y helyen differenciálható, akkor az $(f \circ g)(x) := f(g(x))$ összetett függvény az x helyen is differenciálható és

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Bizonyítás. Az $y := g(x)$ jelölés mellett legyen

$$F(t) := \begin{cases} \frac{f(t) - f(y)}{t - y} & \text{ha } t \in]c, d[, \text{ de } t \neq y, \\ f'(y) & \text{ha } t = y. \end{cases}$$

Mivel f differenciálható az y helyen, így

$$\lim_{t \rightarrow y} \frac{f(t) - f(y)}{t - y} = f'(y),$$

ami azt jelenti, hogy az F függvény folytonos az y helyen.

Legyen h olyan kicsi szám, hogy

$$x + h \in]a, b[\quad \text{és} \quad g(x + h) \in]c, d[$$

egyszerre teljesüljön. Ez azért lehetséges, mert a g függvény folytonos az x pontban, hiszen ott differenciálható. Jelölje $s := g(x + h) - g(x)$. Az előző jelölések mellett

$$\frac{f(g(x + h)) - f(g(x))}{h} = \frac{f(y + s) - f(y)}{h},$$

azonban

$$\frac{f(y + s) - f(y)}{h} = F(y + s) \frac{s}{h}.$$

Ez utóbbi rögtön következik az F függvény értelmezéséből, ha $s \neq 0$, illetve mindkét oldala nulla, ha $s = 0$. Továbbá az s értelmezése miatt

$$F(y + s) \frac{s}{h} = F(g(x + h)) \frac{g(x + h) - g(x)}{h}.$$

Mivel az F függvény folytonos az $y = g(x)$ helyen, ezért alkalmazható az összetett függvény pontbeli határértékére vonatkozó tétel (lásd a „Folytonos függvények” című tananyag 25. Tételét). Így

$$\lim_{h \rightarrow 0} F(g(x + h)) = F(g(x)) = F(y) = f'(y) = f'(g(x)).$$

Ezért

$$\begin{aligned}
 (f \circ g)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} F(g(x+h)) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} F(g(x+h)) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \\
 &= f'(g(x))g'(x).
 \end{aligned}$$

Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

Az összetett függvényre vonatkozó szabály azt mondja ki, hogy egy összetett függvény deriváltjához először a külső függvényt deriváljuk, miközben belseje érintetlen marad. Ezt utána még megszorozzuk a belső függvény deriváltjával.

A

$$h(x) = \sin(x^2)$$

függvény deriválásához észre kell venni, hogy a külső függvény $f(x) = \sin x$ és a belső függvény $g(x) = x^2$. Mivel $f'(x) = \cos x$ és $g'(x) = 2x$, így

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x) = \cos(x^2)2x.$$

Teljesen más eredményre jutunk, ha a

$$h(x) = \sin^2 x$$

függvényt deriváljuk. Nézzük figyelmesen a függvény megadását! Itt a négyzetre emelés a teljes szinusz függvényre vonatkozik, azaz $h(x) = (\sin x)^2$. Ezért a külső függvény $f(x) = x^2$ és a belső függvény $g(x) = \sin x$, és ez az előző feladatban fordítva szerepelt. Mivel $f'(x) = 2x$ és $g'(x) = \cos x$, így

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x) = 2 \sin x \cos x.$$

Hasonló módon lehet a

$$h(x) = (x^3 + 2x)^{10}$$

függvényt deriválni. Ebben az esetben a külső függvény $f(x) = x^{10}$, melynek deriváltja $f'(x) = 10x^9$. A belső függvény $g(x) = x^3 + 2x$, melynek deriváltja $g'(x) = 3x^2 + 2$. Ezért

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x) = 10(x^3 + 2x)^9(3x^2 + 2).$$

Az előzőekben láttuk, hogy a deriválási szabályok mennyire megkönnyítik a számításokat, ha ismerjük a képletben szereplő függvények deriváltját. Ezért amennyire lehetséges a definíció helyett a deriválási szabályokkal oldjuk meg a feladatokat. Erre jó példa a következő feladat, amivel tovább bővítjük az ismert elemi függvények deriváltjainak sorát.

5. Feladat. Igazoljuk a következő függvények deriváltjainak eredményét!

$$a) \text{ Ha } f(x) = \cos x, \quad \text{akkor} \quad f'(x) = -\sin x,$$

$$b) \text{ Ha } f(x) = \operatorname{tg} x, \quad \text{akkor} \quad f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$c) \text{ Ha } f(x) = \operatorname{ctg} x, \quad \text{akkor} \quad f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Megoldás:

(a) $f(x) = \cos x$

Az ismert

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \quad \text{és} \quad \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

összefüggésekből következik az összetett függvényre vonatkozó deriválási szabály alkalmazásával, tudniillik

$$\begin{aligned} (\cos x)' &= \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \sin'\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x\right)' = \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot (-1) = -\sin x. \end{aligned}$$

(b) $f(x) = \operatorname{tg} x$

Alkalmazhatjuk a hányadosra vonatkozó deriválási szabályt, hiszen

$$\begin{aligned} (\operatorname{tg} x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{\cos x \cos x - \sin x (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

(c) $f(x) = \operatorname{ctg} x$

A tangens függvényhez hasonlóan:

$$\begin{aligned} (\operatorname{ctg} x)' &= \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)' \sin x - \cos x (\sin x)'}{\sin^2 x} = \\ &= \frac{-\sin x \sin x - \cos x (\cos x)}{\sin^2 x} = -\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}. \end{aligned}$$

Az összetett függvény deriválási szabályának alkalmazásakor a külső függvény deriválásával kezdünk, a belső függvénnyel később foglalkozunk. A külső függvény csak azok közül a függvények közül kerülhet ki, amelyeket már tudunk deriválni. A szabály alkalmazását segíti, ha megnézzük milyen alakokat kapunk különböző külső függvények esetén.

Például a $(\cos x)' = -\sin x$ elemi függvény deriváltjából a

$$(\cos(\square))' = -\sin(\square) (\square)'$$

alakot kapunk. A \square dobozba bármilyen függvényt rakhatunk. Például

$$(\cos(\ln x))' = -\sin(\ln x) (\ln x)' = -\sin(\ln x) \frac{1}{x}.$$

Hasalóan járhatunk el más elemi függvények esetén.

$$(x^n)' = nx^{n-1} \quad \Longrightarrow \quad (\square^n)' = n\square^{n-1} (\square)'$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad \Longrightarrow \quad (\ln(\square))' = \frac{(\square)'}{\square}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \quad \Longrightarrow \quad (\log_a(\square))' = \frac{(\square)'}{\square \ln a}$$

$$(\sin x)' = \cos x \quad \Longrightarrow \quad (\sin(\square))' = \cos(\square) (\square)'$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \Longrightarrow \quad (\operatorname{tg}(\square))' = \frac{(\square)'}{\cos^2(\square)}$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \quad \Longrightarrow \quad (\operatorname{ctg}(\square))' = \frac{-(\square)'}{\sin^2(\square)}$$

Vegyük észre, hogy úgy kaptuk meg a fenti alakokat, hogy az elemi függvények deriváltjába dobozt helyezünk az x helyett és megszorozzuk ennek deriváltjával.

Az összetett függvényekre vonatkozó szabály többszintű összetettség esetén is alkalmazható. Például az

$$f(x) := \operatorname{tg}^3(x^2 + x)$$

függvény összetett, és külső függvénye a köbre emelés. Ezért a deriválást azzal kezdjük

$$f'(x) = 3\operatorname{tg}^2(x^2 + x)(\operatorname{tg}(x^2 + x))'.$$

A $\operatorname{tg}(x^2 + x)$ függvény szintén összetett, külső függvénye a tangens, így

$$(\operatorname{tg}(x^2 + x))' = \frac{1}{\cos^2(x^2 + x)}(x^2 + x)' = \frac{1}{\cos^2(x^2 + x)}(2x + 1).$$

Összefoglalva

$$f'(x) = 3 \operatorname{tg}^2(x^2 + x) \frac{1}{\cos^2(x^2 + x)} (2x + 1).$$

A külső függvénytől „befelé” haladva deriválunk. A külső függvényt deriváljuk, és ebbe a belső függvényt behelyettesítjük, majd megszorozzuk a belső függvény deriváltjával, ami újabb összetett függvény lehet, így az eljárást vele is megismételjük. Előfordul tehát, hogy az eljárást többször meg kell ismételni, amíg eljutunk egy nem összetett belső függvényig. Menet közben a már derivált részekkel láncot alkotunk egymás után megszorozva őket. Ezért ezt a szabályt **láncszabálynak** is nevezik.

5. Inverzfüggvények differenciálása

A következő szabállyal meghatározhatjuk egy függvény inverzének deriváltját az eredeti függvény deriváltjának segítségével.

7. Tétel. Legyen $]a, b[$ egy nyílt intervallum, $f:]a, b[\rightarrow \mathbf{R}$ egy folytonos szigorúan monoton függvény, továbbá $x \in]a, b[$. Ha az f függvény az x helyen differenciálható, valamint $f'(x) \neq 0$, akkor az f^{-1} függvény differenciálható az $y := f(x)$ helyen és

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Bizonyítás. Tudjuk, hogy minden intervallumon értelmezett szigorúan monoton függvény invertálható és inverze folytonos függvény (lásd a „Folytonos függvények” című tananyag 7. Tételét). Ezért a tétel feltételeit teljesítő függvény inverze létezik és folytonos az y pontban.

Az inverz függvény értelmezési tartománya egy olyan nyílt intervallum, amelynek y az egyik belső pontja. Legyen h olyan kicsi szám, hogy az inverz függvény is értelmezhető legyen az $y + h$ helyen. Jelölje

$$s := f^{-1}(y + h) - f^{-1}(y).$$

Mivel $x = f^{-1}(y)$, így $s = f^{-1}(y + h) - x$, azaz $h = f(x + s) - f(x)$. Az f^{-1} függvény folytonos az y pontban, ezért $s \rightarrow 0$, ha $h \rightarrow 0$. Ezzel

$$\begin{aligned} (f^{-1})'(y) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(y + h) - f^{-1}(y)}{h} = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{f(x + s) - f(x)} = \\ &= \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(x + s) - f(x)}{s}} = \frac{1}{f'(x)}, \end{aligned}$$

hiszen $f'(x) \neq 0$. Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

A kapott eredmény nem meglepő, hiszen tudjuk, hogy $f(f^{-1}(y)) = y$, és így mindkét oldal deriválásából (y a változó) igaz, hogy $(f(f^{-1}(y)))' = 1$. Ekkor az összetett függvényre vonatkozó deriválási szabály szerint

$$f'(f^{-1}(y))(f^{-1}(y))' = 1$$

teljesül, amiből az igazolt inverz függvény deriválási szabálya adódik.

Nézzük, hogyan alkalmazhatjuk az előző tételt a gyakorlatban. Határozzuk meg az $f(x) = \sqrt{x}$ függvény deriváltját $x > 0$ esetén! Tudjuk, hogy inverze a pozitív számokon értelmezett x^2 függvény. Az

$$y = f(x) = x^2 \quad \text{és} \quad x = f^{-1}(y) = \sqrt{y}$$

jelölés mellett alkalmazhatjuk az inverz függvény deriváltjára vonatkozó szabályt, ahol $x, y > 0$. Így

$$(\sqrt{y})' = (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{(x^2)'} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Ezért az $f(x) = \sqrt{x}$ függvény deriváltja az $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ függvény.

A következő eredménynek nagyon nagy jelentősége van a matematikai analízisben és alkalmazási területeiben.

6. Feladat. Igazoljuk, hogy

$$(e^x)' = e^x.$$

Megoldás: Tudjuk, hogy az exponenciális függvény a logaritmus függvény inverze. Az

$$y = f(x) = \ln x \quad \text{és} \quad x = f^{-1}(y) = e^y$$

jelölés mellett alkalmazhatjuk az inverz függvény deriváltjára vonatkozó szabályt, ahol $x > 0$ és $y \in \mathbf{R}$. Így

$$(e^y)' = (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x = e^y,$$

hiszen $f'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Ha az exponenciális függvény kitevőjében egy tetszőleges függvény szerepel, akkor olyan összetett függvénnyel állunk szemben, melynek külső függvénye az e^x . Ez a következő alakot veszi fel

$$(e^x)' = e^x \quad \implies \quad (e^{\boxed{}})' = e^{\boxed{}} (\boxed{})'$$

Lássunk egy példát! Deriváljuk az $f(x) = e^{x^2-3x}$ függvényt! A fentiek szerint

$$(e^{\boxed{x^2 - 3x}})' = e^{\boxed{x^2 - 3x}} (\boxed{x^2 - 3x})' = e^{x^2-3x} (2x - 3),$$

azaz a változatlan exponenciális kifejezést megszorozzuk a kitevő deriváltjával.

Ha az exponenciális függvény alapja nem az e szám, akkor a következő módon deriválunk:

7. Feladat. Legyen $a > 0$ és $a \neq 1$. Igazoljuk, hogy

$$(a^x)' = a^x \ln a.$$

Megoldás: Mivel az e^x és az $\ln x$ függvények egymás inverzei, így

$$a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a} \quad (x \in \mathbf{R}).$$

$\ln a$ egy konstans, ezért az összetett függvény deriválása alapján

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a} (x \ln a)' = e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a.$$

Ha az $f(x) = a^x$ egy összetett függvény külső függvénye, akkor az

$$(a^x)' = a^x \ln a \quad \implies \quad (a^{\boxed{}})' = a^{\boxed{}} \ln a (\boxed{})'$$

Lássunk egy példát! Deriváljuk az $f(x) = 2^{\sin x}$ függvényt! A fentiek szerint

$$(2^{\boxed{\sin x}})' = 2^{\boxed{\sin x}} \ln 2 (\boxed{\sin x})' = 2^{\sin x} \ln 2 \cos x.$$

A 7. Feladatban az függvény $f(x) = a^x$ deriválását nem az inverz függvény deriválási szabálya szerint számítottuk ki, hanem az

$$x^y = e^{y \ln x} \quad (x > 0, y \in \mathbf{R})$$

azonosságot alkalmaztuk, hogy olyan összetett függvényé alakítsuk, amelynek külső függvénye az e^x . Habár erre a módszerre több figyelmet szentelünk egy későbbi részben, egy alaperedményt tudunk vele igazolni, amit most szeretnénk bemutatni.

8. Feladat. Legyen α egy tetszőleges valós szám és $x > 0$. Igazoljuk, hogy

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Megoldás: Mivel az e^x és az $\ln x$ függvények egymás inverzei, így

$$x^\alpha = e^{\ln x^\alpha} = e^{\alpha \ln x}.$$

Ekkor

$$(x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x} (\alpha \ln x)' = e^{\alpha \ln x} \alpha \cdot \frac{1}{x} = x^\alpha \alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

A fenti eredményt már ismertük pozitív egész α számok esetén, hiszen ezt igazoltuk a 3. Feladatban. Ekkor minden x valós számra igaz az állítás, de ez nem minden α esetén mondható el. Például $\alpha = \frac{1}{2}$ esetén

$$(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

ami csak $x > 0$ esetén értelmezhető. Más a helyzet $\alpha = -1$ esetén, hiszen az

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = (-1)x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

a negatív számokon is értelmezhető lenne. Ez igaz is, mert ha α olyan szám, ahol x^α értelmezhető $x < 0$ esetén, akkor

$$x^\alpha = (-1)^\alpha (-x)^\alpha$$

összetett függvényként deriválva ($g(x) = -x$ a belső függvénye)

$$(x^\alpha)' = (-1)^\alpha \alpha (-x)^{\alpha-1} (-1) = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Térjünk vissza az inverz függvények deriváltjához. Hátra vannak még a trigonometrikus függvények inverzei, az ún. arkusz függvények. Deriváltjukat az inverz függvényre vonatkozó deriválási szabállyal tudjuk kiszámítani.

9. Feladat. *Igazoljuk, hogy*

$$\begin{array}{ll} a) (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & b) (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \\ c) (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, & d) (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2} \end{array}$$

Megoldás:

(a) Legyen $y = f(x) = \sin x$ és $x = f^{-1}(y) = \arcsin y$, ahol $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.
Ekkor

$$(\arcsin y)' = (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{(\sin x)'} = \frac{1}{\cos x}.$$

Mivel ha $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, akkor $\cos x \geq 0$, így

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad \implies \quad \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}.$$

Ezért

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}},$$

hiszen az alkalmazott jelölés szerint $y^2 = \sin^2 x$.

- (b) A feladat az előzőhöz hasonlóan megoldható az inverz függvények deriválási szabályával, de rögtön következnek az

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$$

azonosságból az előző pontban igazolt arkusz szinusz függvény deriváltja segítségével. Az azonosság azért igaz, mert ha $y = \arccos x$, azaz

$$x = \cos y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right),$$

akkor

$$\arcsin x = \frac{\pi}{2} - y \quad \implies \quad y = \frac{\pi}{2} - \arcsin x.$$

- (c) Legyen $y = f(x) = \operatorname{tg} x$ és $x = f^{-1}(y) = \operatorname{arctg} y$, ahol $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. Ekkor

$$(\operatorname{arctg} y)' = (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{(\operatorname{tg} x)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \cos^2 x.$$

Mivel

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1,$$

így

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}.$$

Ezért

$$(\operatorname{arctg} y)' = \cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1 + y^2}$$

hiszen az alkalmazott jelölés szerint $y^2 = \operatorname{tg}^2 x$.

- (d) A feladat az előzőekhez hasonlóan megoldható az inverz függvények deriválási szabályával, de rögtön következnek az

$$\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$$

azonosságból az előző pontban igazolt arkusz tangens függvény deriváltja segítségével. Az azonosság azért igaz, mert ha $y = \operatorname{arcctg} x$, azaz

$$x = \operatorname{ctg} y = \frac{\cos y}{\sin y} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right)} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - y\right),$$

akkor

$$\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - y \quad \implies \quad y = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x.$$

6. Megoldott vegyes feladatok

Ebben a részben a deriválást fogjuk begyakorolni. Összefoglalásként soroljuk fel az eddig tanult elemi függvények deriváltjait, és ezután oldjunk meg néhány feladatot!

$$\text{ha } f(x) = c, \quad \text{akkor } f'(x) = 0 \quad (c \text{ állandó});$$

$$\text{ha } f(x) = x^\alpha, \quad \text{akkor } f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \quad (\alpha \in \mathbf{R});$$

$$\text{ha } f(x) = e^x, \quad \text{akkor } f'(x) = e^x,$$

$$\text{ha } f(x) = a^x, \quad \text{akkor } f'(x) = a^x \ln a,$$

$$\text{ha } f(x) = \ln x, \quad \text{akkor } f'(x) = \frac{1}{x},$$

$$\text{ha } f(x) = \log_a x, \quad \text{akkor } f'(x) = \frac{1}{x \ln a},$$

$$\text{ha } f(x) = \sin x, \quad \text{akkor } f'(x) = \cos x,$$

$$\text{ha } f(x) = \cos x, \quad \text{akkor } f'(x) = -\sin x,$$

$$\text{ha } f(x) = \operatorname{tg} x, \quad \text{akkor } f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$\text{ha } f(x) = \operatorname{ctg} x, \quad \text{akkor } f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x},$$

$$\text{ha } f(x) = \arcsin x, \quad \text{akkor } f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\text{ha } f(x) = \arccos x, \quad \text{akkor } f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\text{ha } f(x) = \operatorname{arctg} x, \quad \text{akkor } f'(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

$$\text{ha } f(x) = \operatorname{arcctg} x, \quad \text{akkor } f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}.$$

10. Feladat. Adja meg a következő függvények deriváltját!

$$a) f(x) = 5x^8 + 3x^3 + x - 1,$$

$$b) f(x) = \frac{1}{x^3\sqrt{x}},$$

$$c) f(x) = 5 \log_3 x - \frac{3}{x} + \arccos 0,$$

$$d) f(x) = \frac{2x^4 + x^2 - 1}{\sqrt{x}},$$

$$e) f(x) = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \ln x,$$

$$f) f(x) = e^x (\sqrt[3]{x^2} + e^2),$$

$$g) f(x) = \frac{2^x + 1}{\sin x},$$

$$h) f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{\log_2 x + x^2},$$

$$i) f(x) = (\sqrt{x} + 3)^{11},$$

$$j) f(x) = \frac{1}{e^{x^2-x}},$$

$$k) f(x) = \ln \left(\frac{x-1}{x+1}\right),$$

$$l) f(x) = \operatorname{tg} \left(2 + \frac{1}{x^4}\right),$$

$$m) f(x) = \ln \frac{1}{x} \cdot e^{\operatorname{arctg} x},$$

$$n) f(x) = \frac{2^x + \sin 2x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}},$$

$$o) f(x) = \sqrt{\sin(x^2 e^{x+1})},$$

$$p) f(x) = \ln^4 \sqrt{\frac{\sin x + x}{\cos x - x}}.$$

Megoldás: A deriválási szabályokat alkalmazzuk a feladatban szereplő függvények deriváltjának meghatározásakor. Minden lépés előtt el kell dönteni melyik szabályt kell alkalmazni, és vele részfeladatokra bontani a feladatot addig, amíg elemi függvényekhez nem jutunk.

$$(a) \boxed{f(x) = 5x^8 + 3x^3 + x - 1}$$

Deriváljuk tagonként a függvényt! Az eredmény

$$f'(x) = 40x^7 + 9x^2 + 1.$$

$$(b) \boxed{f(x) = \frac{1}{x^3\sqrt{x}}}$$

Alakítsuk át a függvényt x^α alakra!

$$f(x) = \frac{1}{x^3 x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{x^{\frac{7}{2}}} = x^{-\frac{7}{2}}$$

Ez már kiszámítható az $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ összefüggéssel

$$f'(x) = (x^{-\frac{7}{2}})' = -\frac{7}{2} x^{-\frac{9}{2}} = -\frac{7}{2\sqrt{x^9}}.$$

$$(c) \quad f(x) = 5 \log_3 x - \frac{3}{x} + \arccos 0$$

Deriváljuk tagonként a függvényt! Az eredmény

$$f'(x) = \frac{5}{x \ln 3} + \frac{3}{x^2},$$

hiszen $\arccos 0$ egy konstans, deriváltja 0.

$$(d) \quad f(x) = \frac{2x^4 + x^2 - 1}{\sqrt{x}}$$

Átalakítással

$$f(x) = \frac{2x^4 + x^2 - 1}{\sqrt{x}} = \frac{2x^4}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{x^2}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = 2x^{\frac{7}{2}} + x^{\frac{3}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}.$$

Ekkor

$$f'(x) = 7x^{\frac{5}{2}} + \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}.$$

Ez a derivált a hányadosra vonatkozó szabállyal is kiszámítható.

$$(e) \quad f(x) = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \ln x$$

A szorzásra vonatkozó szabály alapján

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2 + x^{-2})' \ln x + \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) (\ln x)' = \\ &= (2x - 2x^{-3}) \ln x + \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

$$(f) \quad f(x) = e^x (\sqrt[3]{x^2} + e^2)$$

A szorzásra vonatkozó szabály alapján

$$f'(x) = (e^x)'(\sqrt[3]{x^2} + e^2) + e^x(x^{\frac{2}{3}} + e^2)' = e^x(\sqrt[3]{x^2} + e^2) + e^x \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}.$$

$$(g) \quad f(x) = \frac{2^x + 1}{\sin x}$$

A hányadosra vonatkozó szabály alapján

$$f'(x) = \frac{(2^x + 1)' \sin x - (2^x + 1)(\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{2^x (\ln 2) \sin x - (2^x + 1) \cos x}{\sin^2 x}.$$

$$(h) \quad f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{\log_2 x + x^2}$$

A hányadosra vonatkozó szabály alapján

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(\operatorname{arctg} x)'(\log_2 x + x^2) - \operatorname{arctg} x(\log_2 x + x^2)'}{(\log_2 x + x^2)^2} = \\ &= \frac{1}{1+x^2}(\log_2 x + x^2) - \operatorname{arctg} x \left(\frac{1}{x \ln 2} + 2x \right) \\ &= \frac{(\log_2 x + x^2) - \operatorname{arctg} x \left(\frac{1}{x \ln 2} + 2x \right)}{(\log_2 x + x^2)^2}. \end{aligned}$$

$$(i) \quad f(x) = (\sqrt{x} + 3)^{11}$$

Az összetett függvényre vonatkozó szabály alapján

$$f'(x) = 11(\sqrt{x} + 3)^{10}(\sqrt{x} + 3)' = 11(\sqrt{x} + 3)^{10} \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$(j) \quad f(x) = \frac{1}{e^{x^2-x}}$$

Átalakítással

$$f(x) = \frac{1}{e^{x^2-x}} = e^{x-x^2}.$$

Ekkor az összetett függvényre vonatkozó szabály alapján

$$f'(x) = e^{x-x^2}(x-x^2)' = e^{x-x^2}(1-2x).$$

$$(k) \quad f(x) = \ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right)$$

Az összetett függvényre vonatkozó szabály alapján

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\frac{x-1}{x+1}} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)' = \\ &= \frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{(x-1)'(x+1) - (x-1)(x+1)'}{(x+1)^2} = \\ &= \frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{1 \cdot (x+1) - (x-1) \cdot 1}{(x+1)^2}. \end{aligned}$$

Átalakítás után az eredmény:

$$f'(x) = \frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{2}{x^2-1}.$$

$$(l) \quad f(x) = \operatorname{tg} \left(2 + \frac{1}{x^4} \right)$$

Az összetett függvényre vonatkozó szabály alapján

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\cos^2 \left(2 + \frac{1}{x^4} \right)} \left(2 + x^{-4} \right)' = \\ &= \frac{1}{\cos^2 \left(2 + \frac{1}{x^4} \right)} \left(-4x^{-5} \right) = \\ &= -\frac{4}{x^5 \cos^2 \left(2 + \frac{1}{x^4} \right)}. \end{aligned}$$

$$(m) \quad f(x) = \ln \frac{1}{x} \cdot e^{\operatorname{arctg} x}$$

A szorzásra vonatkozó szabály alapján

$$f'(x) = \left(\ln \frac{1}{x} \right)' e^{\operatorname{arctg} x} + \ln \frac{1}{x} \left(e^{\operatorname{arctg} x} \right)'$$

Az összetett függvényre vonatkozó szabály szerint

$$\left(\ln \frac{1}{x} \right)' = \frac{1}{\frac{1}{x}} \left(\frac{1}{x} \right)' = x \left(-\frac{1}{x^2} \right) = -\frac{1}{x}$$

és

$$\left(e^{\operatorname{arctg} x} \right)' = e^{\operatorname{arctg} x} (\operatorname{arctg} x)' = e^{\operatorname{arctg} x} \frac{1}{1+x^2}.$$

A végeredmény

$$f'(x) = -\frac{1}{x} e^{\operatorname{arctg} x} + \ln \frac{1}{x} \left(e^{\operatorname{arctg} x} \frac{1}{1+x^2} \right).$$

$$(n) \quad f(x) = \frac{2^x + \sin 2x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

A hányadosra vonatkozó szabály alapján

$$f'(x) = \frac{(2^x + \sin 2x + 1)' \sqrt{x^2 + 1} - (2^x + \sin 2x + 1) (\sqrt{x^2 + 1})'}{x^2 + 1}.$$

Az összetett függvényre vonatkozó szabály szerint

$$(2^x + \sin 2x + 1)' = 2^x \ln 2 + (\cos 2x) \cdot 2 = 2^x \ln 2 + 2 \cos 2x$$

és

$$(\sqrt{x^2 + 1})' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

A végeredmény

$$f'(x) = \frac{(2^x \ln 2 + 2 \cos 2x)\sqrt{x^2 + 1} - (2^x + \sin 2x + 1)\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x^2 + 1}.$$

(o) $f(x) = \sqrt{\sin(x^2 e^{x+1})}$

A láncszabály alkalmazásával

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{\sin(x^2 e^{x+1})}} (\sin(x^2 e^{x+1}))' = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\sin(x^2 e^{x+1})}} \cos(x^2 e^{x+1}) (x^2 e^{x+1})' = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\sin(x^2 e^{x+1})}} \cos(x^2 e^{x+1}) (2x e^{x+1} + x^2 e^{x+1}). \end{aligned}$$

(p) $f(x) = \ln^4 \sqrt{\frac{\sin x + x}{\cos x - x}}$

A láncszabály alkalmazásával

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4 \ln^3 \sqrt{\frac{\sin x + x}{\cos x - x}} \left(\ln \sqrt{\frac{\sin x + x}{\cos x - x}} \right)' = \\ &= 4 \ln^3 \sqrt{\frac{\sin x + x}{\cos x - x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{\sin x + x}{\cos x - x}}} \left(\sqrt{\frac{\sin x + x}{\cos x - x}} \right)' = \\ &= 4 \ln^3 \sqrt{\frac{\sin x + x}{\cos x - x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{\sin x + x}{\cos x - x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{\sin x + x}{\cos x - x}}} \left(\frac{\sin x + x}{\cos x - x} \right)' = \\ &= 2 \ln^3 \sqrt{\frac{\sin x + x}{\cos x - x}} \cdot \frac{1}{\frac{\sin x + x}{\cos x - x}} \cdot \left(\frac{\sin x + x}{\cos x - x} \right)'. \end{aligned}$$

A hányadosra vonatkozó szabály alapján

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sin x + x}{\cos x - x} \right)' &= \frac{(\sin x + x)'(\cos x - x) - (\sin x + x)(\cos x - x)'}{(\cos x - x)^2} = \\ &= \frac{(\cos x + 1)(\cos x - x) + (\sin x + x)(\sin x + 1)}{(\cos x - x)^2}. \end{aligned}$$

A végeredmény egyszerűsítés után

$$f'(x) = 2 \ln^3 \sqrt{\frac{\sin x + x}{\cos x - x}} \cdot \frac{1}{\sin x + x} \cdot \frac{(\cos x + 1)(\cos x - x) + (\sin x + x)(\sin x + 1)}{\cos x - x}.$$

11. Feladat. Adja meg a következő függvény deriváltját!

$$f(x) = \sin^2 \left(\frac{x \log_{\pi} x + \operatorname{arctg}(\ln x^2)}{\sqrt{x^2 + x + 1}} \right) e^{\operatorname{tg}\left(\frac{1}{x^3}\right)+1}$$

Megoldás: A feladat jól mutatja azt, hogy ha türelmesen és körültekintően dolgozunk, akkor képesek leszünk kiszámítani akár milyen hosszú és bonyolult képlettel megadott függvény deriváltját. A lényeg az, hogy a feladatot a deriválási szabályokkal részfeladatokra bontjuk, és ezeket további részfeladatokra, ha szükséges. A végeredmény

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \sin \left(\frac{x \log_{\pi} x + \operatorname{arctg}(\ln x^2)}{\sqrt{x^2 + x + 1}} \right) \cos \left(\frac{x \log_{\pi} x + \operatorname{arctg}(\ln x^2)}{\sqrt{x^2 + x + 1}} \right) \cdot \\ &\quad \cdot \left[\frac{\left(\log_{\pi} x + x \cdot \frac{1}{x \ln \pi} + \frac{1}{1 + \ln^2 x^2} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x \right) \sqrt{x^2 + x + 1}}{x^2 + x + 1} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(x \log_{\pi} x + \operatorname{arctg}(\ln x^2)) \frac{1}{2\sqrt{x^2 + x + 1}} \cdot (2x + 1)}{x^2 + x + 1} \right] \cdot e^{\operatorname{tg}\left(\frac{1}{x^3}\right)+1} + \\ &\quad + \sin^2 \left(\frac{x \log_{\pi} x + \operatorname{arctg}(\ln x^2)}{\sqrt{x^2 + x + 1}} \right) e^{\operatorname{tg}\left(\frac{1}{x^3}\right)+1} \frac{1}{\cos^2\left(\frac{1}{x^3}\right)} \cdot (-3x^{-4}). \end{aligned}$$

7. Logaritmusos deriválás

Ha olyan összetett függvényt deriválunk, amelynek külső függvénye egy hatványfüggvény, azaz ha a kifejezés kitevőjében szám szerepel, akkor ezt úgy számítjuk ki, hogy a kitevő lekerül szorzóként az egész kifejezés elé, eggyel csökkentjük a kitevőt és az egészet megszorozzuk az alapon lévő függvény deriváltjával. Például,

$$\left(\left(x + \frac{1}{x} \right)^9 \right)' = 9 \left(x + \frac{1}{x} \right)^8 \left(x + \frac{1}{x} \right)' = 9 \left(x + \frac{1}{x} \right)^8 \left(1 - \frac{1}{x^2} \right).$$

Ha a külső függvény exponenciális, azaz az alap egy szám és a kitevőben egy függvény áll, akkor úgy deriválunk, hogy ugyanazt leírjuk, és megszorozzuk az alapon levő szám természetes alapú logaritmusával, valamint a kitevőben lévő függvény deriváltjával. Például

$$\left(9^{x+\frac{1}{x}} \right)' = 9^{x+\frac{1}{x}} \ln 9 \left(x + \frac{1}{x} \right)' = 9^{x+\frac{1}{x}} \ln 9 \left(1 - \frac{1}{x^2} \right).$$

A kérdés az, hogy hogyan lehet deriválni, ha az alap és a kitevő is függvény, azaz mindkettő függ az x változótól. Például, deriváljuk az

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{x} \right)^{x^2} \quad (x > 0).$$

függvényt! Alkalmazni fogjuk a 7. és 8. Feladat megoldásában bemutatott módszert, amely az

$$x^y = e^{y \ln x} \quad (x > 0, y \in \mathbf{R})$$

azonosságon alapul. Először a függvényt átalakítjuk a következő módon

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{x} \right)^{x^2} = e^{\ln \left(x + \frac{1}{x} \right)^{x^2}} = e^{x^2 \ln \left(x + \frac{1}{x} \right)}.$$

Ezzel olyan összetett függvényt kapunk, amelynek külső függvénye az exponenciális függvény, és így már ki tudjuk számítani a deriváltját

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{x^2 \ln \left(x + \frac{1}{x} \right)} \left(x^2 \ln \left(x + \frac{1}{x} \right) \right)' = \\ &= e^{x^2 \ln \left(x + \frac{1}{x} \right)} \left(2x \ln \left(x + \frac{1}{x} \right) + x^2 \frac{1}{x + \frac{1}{x}} \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) \right) = \\ &= \left(x + \frac{1}{x} \right)^{x^2} \left(2x \ln \left(x + \frac{1}{x} \right) + x^2 \frac{1}{x + \frac{1}{x}} \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) \right). \end{aligned}$$

Ezt a módszert **logaritmusos deriválásnak** nevezzük.

A logaritmusos deriváláshoz is alkothattunk volna egy külön deriválási szabályt az alap és a kitevőben szereplő függvények alapján, de a bemutatott módszert könnyebb megjegyezni, hiszen csak az alapvető deriválási szabályokat használja fel.

12. Feladat. Adja meg a következő függvények deriváltját!

$$a) f(x) = x^{\sin x} \quad (x > 0),$$

$$b) f(x) = (\ln x)^{x+1} \quad (x > 1).$$

Megoldás: A logaritmikus deriválást alkalmazunk.

(a) Átalakítással

$$f(x) = x^{\sin x} = e^{\ln x^{\sin x}} = e^{\sin x \ln x}.$$

Így

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{\sin x \ln x} (\sin x \ln x)' = \\ &= e^{\sin x \ln x} \left(\cos x \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x} \right) = \\ &= x^{\sin x} \left(\cos x \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x} \right). \end{aligned}$$

(b) Átalakítással

$$f(x) = (\ln x)^{x+1} = e^{\ln(\ln x)^{x+1}} = e^{(x+1) \ln(\ln x)}.$$

Így

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{(x+1) \ln(\ln x)} ((x+1) \ln(\ln x))' = \\ &= e^{(x+1) \ln(\ln x)} \left(\ln(\ln x) + (x+1) \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} \right) = \\ &= (\ln x)^{x+1} \left(\ln(\ln x) + (x+1) \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} \right). \end{aligned}$$

8. Esetekből álló függvények deriváltja

Ebben a részben olyan függvények differenciálhatóságával foglalkozunk, amelyek különböző intervallumokon más hozzárendelési szabállyal vannak értelmezve. Az egyes hozzárendelési szabályok gyakran differenciálható függvényekből állnak, de ebből nem következik, hogy a teljes függvény differenciálható lesz.

Például az

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{ha } x \leq 0, \\ e^{-x} & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

függvényt a

$$b(x) = 2 - x \quad \text{és} \quad j(x) = e^{-x}$$

differenciálható függvényekből áll össze. Ebből következik, hogy az f függvény differenciálható minden $x < 0$ és $x > 0$ pontban, de az $x_0 = 0$ átmeneti pontban a differenciálhatóságot külön kell vizsgálni. Ez ebben az esetben nem teljesül, mert az f függvény nem folytonos az $x_0 = 0$ pontban, hiszen

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 2 - x = 2 \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-x} = 1,$$

azaz a függvény bal- és jobboldali határértéke nem egyezik meg az $x_0 = 0$ pontban.

Hasonló a helyzet az

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{ha } x < 1, \\ x^2 & \text{ha } x > 1 \end{cases}$$

függvény esetében azzal a különbséggel, hogy a függvény differenciálható minden $x < 1$ és $x > 1$ pontban, folytonos az $x_0 = 1$ pontban, de ott mégsem differenciálható, hiszen a bal- és jobboldali differenciálhányados nem egyezik meg ebben a pontban. Valóban

$$\begin{aligned} f'_-(1) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{3(1+h) - 2 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{3h}{h} = 3, \\ f'_+(1) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^2 + 2h}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} (h + 2) = 2. \end{aligned}$$

Kérdés, hogy a deriválási szabályok alkalmazásával tudnánk-e egyszerűbben megvizsgálni a differenciálhatóságot ilyen esetekben. Ehhez először vizsgáljuk meg milyen tulajdonságokkal rendelkezzenek a b és j függvények ahhoz, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} b(x) & \text{ha } x < x_0, \\ y_0 & \text{ha } x = x_0, \\ j(x) & \text{ha } x > x_0 \end{cases}$$

függvény differenciálható legyen az x_0 átmeneti pontban!

Egy függvény csak akkor lehet differenciálható egy pontban, ha ott folytonos is, bár ez nem elegendő a differenciálhatósághoz. Ahhoz, hogy az f függvény folytonos legyen az x_0 pontban szükséges és elegendő, hogy a pont bal- és jobboldali határértékei megegyezzenek, és egyenlőek legyenek a függvény pontbeli értékével. Tehát

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

Mivel a pont bal- és jobboldali környezetét külön-külön a b és a j függvény határozza meg, így

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} b(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} j(x) = f(x_0).$$

Ha folytonosan terjesztjük ki a b és a j függvényeket az x_0 pontra, azaz

$$b(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0^-} b(x) \quad \text{és} \quad j(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0^+} j(x),$$

akkor azt kapjuk, hogy a

$$b(x_0) = j(x_0) = y_0 \tag{1}$$

feltételnek teljesülnie kell, hiszen $y_0 = f(x_0)$.

A differenciálhatósághoz elegendő, hogy létezzenek az f függvény bal- és jobboldali differenciálhányadosai, és ezek megegyezzenek. (1) miatt $f(x_0) = b(x_0) = j(x_0)$, tehát

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{b(x) - b(x_0)}{x - x_0} = b'_-(x_0),$$

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{j(x) - j(x_0)}{x - x_0} = j'_+(x_0),$$

és így

$$b'_-(x_0) = j'_+(x_0) \tag{2}$$

A fentiek értelmében az f függvény akkor és csak akkor differenciálható az $x_0 = 0$ átmeneti pontban, ha egyszerre teljesül az (1) és a (2) feltétel.

Lássuk egy példát! Vizsgáljuk meg, hogy hol differenciálható az

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{ha } x \leq 0, \\ e^{-x} & \text{ha } x > 0. \end{cases}$$

függvény! Mivel a

$$b(x) = 1 - x \quad \text{és} \quad j(x) = e^{-x}$$

függvények differenciálhatók a valós számok halmazán, így f differenciálható minden $x < 0$ és $x > 0$ pontban. Tehát csak az $x_0 = 0$ átmeneti helyen kell vizsgálni.

A b és j függvények folytonosak a valós számok halmazán, így a $b(x_0)$ és a $j(x_0)$ értékeket behelyettesítéssel számíthatjuk ki

$$b(0) = 1 - 0 = 1 \quad \text{és} \quad j(0) = e^{-0} = 1.$$

Mivel $f(0) = 1$, így az (1) folytonossági feltétel teljesül. Továbbá

$$b'(x) = -1 \quad \text{és} \quad j'(x) = -e^{-x}$$

a valós számok halmazán. Ezért

$$b'_-(0) = b'(0) = -1 \quad \text{és} \quad j'_+(0) = j'(0) = -e^{-0} = -1,$$

azaz a (2) feltétel is teljesül. Az előbbiekből alapján kimondhatjuk, hogy az f függvény az $x_0 = 0$ pontban is differenciálható, és $f'(0) = -1$.

13. Feladat. Állapítsa meg, hogy differenciálhatóak-e az alábbi függvények a megadott pontokban!

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= \begin{cases} \operatorname{arctg} x & \text{ha } x \leq 0, \\ x^3 + x & \text{ha } x > 0 \end{cases} & x_0 = 0, \\ \text{b) } f(x) &= \begin{cases} x + 1 & \text{ha } x \leq 0, \\ \sqrt{x+1} & \text{ha } 0 < x \leq 3, \\ \ln(x+1) & \text{ha } x > 3 \end{cases} & x_0 = 0, x_1 = 3. \end{aligned}$$

Megoldás: A már bemutatott két lépésből álló módszert fogjuk alkalmazni a feladat megoldásában.

$$\text{(a) } f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x & \text{ha } x \leq 0, \\ x^3 + x & \text{ha } x > 0 \end{cases} \quad x_0 = 0$$

Legyen

$$b(x) = \operatorname{arctg} x \quad \text{és} \quad j(x) = x^3 + x.$$

Az (1) feltétel teljesül, hiszen

$$f(0) = b(0) = \operatorname{arctg} 0 = 0 \quad \text{és} \quad j(0) = 0^3 + 0 = 0.$$

Másrészt

$$b'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{és} \quad j'(x) = 3x^2 + 1.$$

A (2) feltétel is teljesül, hiszen

$$b'_-(0) = b'(0) = \frac{1}{1+0^2} = 1 \quad \text{és} \quad j'_+(0) = j'(0) = 3 \cdot 0^2 + 1 = 1.$$

Ezért az f függvény differenciálható az $x_0 = 0$ pontban, és $f'(0) = 1$.

$$(b) \quad f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{ha } x \leq 0, \\ \sqrt{x+1} & \text{ha } 0 < x \leq 3, \\ \ln(x+1) & \text{ha } x > 3 \end{cases} \quad x_0 = 0$$

Legyen

$$b(x) = x+1 \quad \text{és} \quad j(x) = \sqrt{x+1}.$$

Az (1) feltétel teljesül, hiszen

$$f(0) = b(0) = 0+1 = 1 \quad \text{és} \quad j(0) = \sqrt{0+1} = 1.$$

Azonban a (2) feltétel nem teljesül, hiszen

$$b'(x) = 1 \quad \text{és} \quad j'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}},$$

és így

$$b'_-(0) = b'(0) = 1 \quad \text{és} \quad j'_+(0) = j'(0) = \frac{1}{2\sqrt{0+1}} = \frac{1}{2}.$$

Ezért az f függvény az $x_0 = 0$ pontban nem differenciálható.

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{ha } x \leq 0, \\ \sqrt{x+1} & \text{ha } 0 < x \leq 3, \\ \ln(x+1) & \text{ha } x > 3 \end{cases} \quad x_1 = 3$$

Legyen

$$b(x) = \sqrt{x+1} \quad \text{és} \quad j(x) = \ln(x+1).$$

A (1) feltétel nem teljesül, hiszen

$$b(3) = \sqrt{3+1} = 2 \quad \text{és} \quad j(3) = \ln(3+1) = \ln 4,$$

de $\ln 4 \neq 2$. Ezért az f függvény az $x_1 = 3$ pontban nem differenciálható.

14. Feladat. Megadható-e olyan a és b paraméter, hogy differenciálhatóak legyenek a következő függvények?

$$a) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 + b & \text{ha } x < 1, \\ \frac{a}{x} & \text{ha } x \geq 1. \end{cases}$$

$$b) \quad f(x) = \begin{cases} \sin ax + b & \text{ha } x \leq 0, \\ e^{x^2} + x & \text{ha } x > 0. \end{cases}$$

Megoldás: A feladatban szereplő függvények mindenütt differenciálhatók a paraméterek értékeitől függetlenül, kivéve az átmeneti pontban, ahol külön meg kell vizsgálni a differenciálhatóságot.

$$(a) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 + b & \text{ha } x < 1, \\ \frac{a}{x} & \text{ha } x \geq 1. \end{cases} \quad x_0 = 1$$

Legyen

$$b(x) = x^2 + b \quad \text{és} \quad j(x) = \frac{a}{x}.$$

Az (1) feltétel akkor teljesül, ha az alábbi

$$b(1) = 1^2 + b = b + 1 \quad \text{és} \quad f(1) = j(1) = \frac{a}{1} = a$$

értékek egyenlőek, azaz $b + 1 = a$. Másrészt

$$b'(x) = 2x \quad \text{és} \quad j'(x) = -\frac{a}{x^2}.$$

Így a (2) feltétel akkor teljesül, ha az alábbi

$$b'(1) = 2 \cdot 1 = 2 \quad \text{és} \quad j'(1) = -\frac{a}{1^2} = -a$$

értékek egyenlőek, azaz $2 = -a$.

Ezért az f függvény differenciálható, ha az

$$\begin{aligned} 1 + b &= a \\ 2 &= -a \end{aligned}$$

egyenletrendszernek van megoldása. A megoldás $a = -2$ és $b = -3$, ami egyben a feladat megoldása is.

$$(b) \quad f(x) = \begin{cases} \sin ax + b & \text{ha } x \leq 0, \\ e^{x^2} + x & \text{ha } x > 0, \end{cases} \quad x_0 = 0$$

Legyen

$$b(x) = \sin ax + b \quad \text{és} \quad j(x) = e^{x^2} + x.$$

Az (1) feltétel akkor teljesül, ha az alábbi

$$f(0) = b(0) = \sin(a \cdot 0) + b = b \quad \text{és} \quad j(0) = e^{0^2} + 0 = 1$$

értékek egyenlőek, azaz $b = 1$. Másrészt

$$b'(x) = a \cos ax \quad \text{és} \quad j'(x) = e^{x^2} 2x + 1.$$

Így a (2) feltétel akkor teljesül, ha az alábbi

$$b'(1) = a \cos(a \cdot 0) = a \quad \text{és} \quad j'(1) = e^{0^2} + 0 = 1$$

értékek egyenlőek, azaz $a = 1$. Ezért a feladat megoldása $a = 1$ és $b = 1$.

9. A differenciálhányados fizikai jelentése

A differenciálhányadost azért vezettük be, mert egy fontos geometriai jellegű feladatot szerettünk volna megoldani, nevezetesen kiszámolni egy függvény grafikonjához egy adott pontban húzott érintő meredekségét. De ha csak a differenciálhányadost definiál

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

határértéket nézzük, akkor azt látjuk, hogy amennyiben a határérték létezik, az x_0 nagyon kis mértékű megváltoztatásakor a függvény értéke úgy változik, hogy a két változás aránya mindig nagyon közel van az $f'(x_0)$ értékhez. Ez a tulajdonság segít értelmezni az időben változó fizikai mennyiségek változásának sebességét az egyes időpillanatokban.

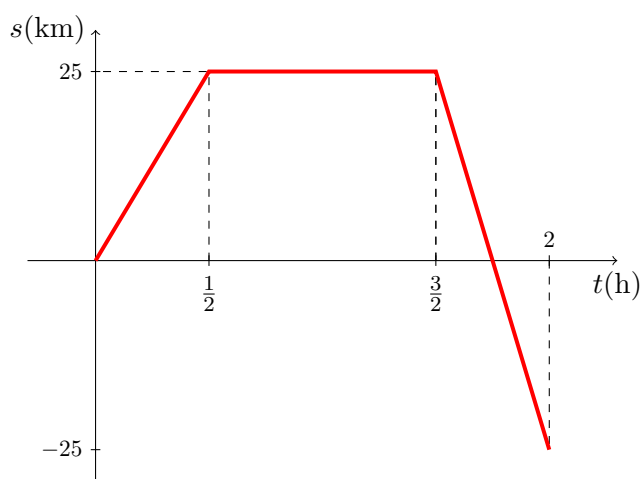
Nézzük egy példát! Autóval utazunk, és azt látjuk, hogy a sebességmérő 60 km/h sebességet mutat. Ez mit is jelent pontosan? Vajon az, hogy 1 óra alatt pontosan 60 kilométert fogjuk megtenni? Nem valószínű, hiszen 1 óra alatt sok minden történhet, ami miatt a vezető nem fogja tudni a sebességet tartani, akár meg is állhat menet közben.

Egy pontszerű test akkor végez egyenletes mozgást egy egyenes pályán, hogy ha bármely megtett szakasz hosszát elosztjuk a szakasz megtételére szükséges idő nagyságával, akkor ugyanazt az értéket kapjuk. Ezt a hányadost a test **sebességének** nevezzük. Ha a mi autónk egyenletesen mozog, akkor igaz lenne, hogy 1 óra alatt 60 kilométert, 1 perc alatt 1 kilométert, 5 másodperc alatt 83,3 métert tenne meg, és így tovább. Pontszerű testről akkor beszélünk, ha a test méretei elhanyagolhatók a pályán megteendő távolsághoz képest, ami érvényes a mi autónk esetében.

Ha egy test nem egyenletesen mozog, akkor is beszélhetünk a test **átlagsebességéről** egy adott szakaszon, ami nem más, mint a szakasz hossza és az ennek megtételéhez szükséges idő hányadosa. A sebességmérő által mutatott 60 km/h sebesség valamiféle átlagsebesség lenne? Most ne a technikai megvalósításra gondoljunk, hanem az elvi értelmezésre. A sebességmérő minden pillanatban megmutatja az autó sebességét, de egy rögzített pillanatban az autó nem mozdul el, nincs megtett szakasz, így átlagsebességéről sem beszélhetünk. Akkor hogyan tudnánk egy test sebességét értelmezni egy adott időpontban? Ha egy egészen kicsi időintervallumot nézünk, akkor azt várjuk, hogy ez idő alatt a sebesség nem változik jelentősen, így a mozgás közelítőleg egyenletes lesz. Ezért egy test sebességét egy adott időpontban úgy kellene értelmezni, mint egy kellően kis időtartamra vett átlagsebességet, de ez így nem elég precíz.

A pontos értelmezéshez ismernünk kell a test mozgását az egyenes pályán a vizsgált I időintervallumban, azaz tudnunk kell milyen távolságban van a test egy, a pályán található referenciaponttól a t időpillanatban, ahol $t \in I$. Jelölje $s(t)$ ezt a távolságot, de mivel két irány van, meg kell őket különböztetni. Az egyik irányban legyen az s értéke pozitív, a másikban pedig negatív. Ezt a függvényt a test **elmozdulásfüggvényének** hívjuk.

Például tegyük fel, hogy egy autó a $t = 0$ időpillanatban elindul 50 km/h egyenletes sebességgel, fél óra után megáll egy órára, és utána visszafordulva 100 km/h egyenletes sebességgel még egy félórán keresztül megy. A referenciapont legyen az a hely, ahol az autó a $t = 0$ időpillanatban volt. Nem nehéz kiszámolni, hogy az autó az első fél órában 25 kilométert, és az utolsó fél órában visszafelé 50 kilométert tesz meg. A következő ábra mutatja az elmozdulásfüggvény grafikonját.



Vegyük észre, hogy visszafelé jövet az autó túlhalad az indulóponton, ezért ezután az elmozdulásfüggvény értéke negatív. Az elmozdulásfüggvény értéke könnyen megadható az idő függvényeként a következő módon

$$s(t) = \begin{cases} 50t & \text{ha } 0 \leq t < \frac{1}{2}, \\ 25 & \text{ha } \frac{1}{2} \leq t < \frac{3}{2}, \\ 175 - 100t & \text{ha } \frac{3}{2} \leq t \leq 2. \end{cases}$$

Térjünk vissza az általános esetre, és legyen s egy I időintervallumon értelmezett elmozdulásfüggvény. Feltétezzük, hogy s egy folytonos függvény, ellenkező esetben a test képes lenne ugyanabban a pillanatban eltűnni és megjelenni a pálya másik pontján.

Vegyünk egy t_0 időpontot az I intervallum belsejéből! Ha $t \in I$ egy másik időpont, akkor $\Delta t := t - t_0$ a két időpont között eltelt idő előjelesen, azaz pozitív, ha $t > t_0$, és negatív, ha $t < t_0$. Ez idő alatt a test egy $\Delta s := s(t) - s(t_0)$ hosszúságú szakaszt tesz meg, ami szintén előjeles mennyiség, hiszen

- ha $\Delta t > 0$, akkor $\Delta s > 0$, ha a test pozitív irányba halad, és $\Delta s < 0$ ha a test ellenkező irányba halad.
- ha $\Delta t < 0$, akkor $\Delta s < 0$, ha a test pozitív irányba halad, és $\Delta s > 0$ ha a test ellenkező irányba halad.

Ezért a

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

különbséghányados abszolút értéke a két időpont között eltelt időintervallumban megtett szakaszra vonatkozó átlagsebesség. Ez pozitív, ha a test pozitív irányba halad, és negatív, ha az ellenkező irányba. Az elvárás szerint a test sebessége a t_0 időpontban egy kellően kis Δt időtartamra vett átlagsebesség. Ezt úgy fogjuk értelmezni, mint az előző kifejezést határérték, ha Δt tart nullához, azaz

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}.$$

Azonban ez éppen az s függvény a t_0 pontban vett differenciálhányadosa. Ez vezet a pillanatnyi sebesség fogalmához.

6. Definíció. *Egy egyenes pályán mozgó test pillanatnyi sebessége egy t_0 időpontban az elmozdulásfüggvény differenciálhányadosa ebben az időpontban.*

Az egyszerűség kedvéért a pillanatnyi sebességre sokszor csak sebességként hivatkozunk. Fontos megjegyezni, hogy a sebesség „figyel” a test haladási irányára, azaz pozitív, ha a test pozitív irányba halad, és negatív, ha az ellenkező irányba. Másrészt a sebesség minden olyan pontban értelmezhető, ahol az s függvény differenciálható, azaz a sebesség függvénynek tekinthető. Ezt a függvényt a v betűvel jelöljük, és értelmezése szerint

$$v(t) := s'(t)$$

teljesül, azaz a sebességfüggvény az elmozdulásfüggvény deriváltja.

Ha egy test egyenletes v_0 sebességgel mozog egy intervallumban, akkor ott az elmozdulásfüggvény

$$s(t) = v_0 t + s_0,$$

ahol s_0 egy konstans. Ennek oka, hogy ilyen alakban írhatók azok a függvények, amelynek deriváltja az állandó v_0 értékkel egyenlő. Egy későbbi tananyagban azt fogjuk igazolni, hogy ha két függvény deriváltja megegyezik egy intervallumban, akkor a két függvény legfeljebb egy konstanssal térhet el egymástól. Ez a konstans az s_0 , amelynek értéke megfelel annak, hogy hol volt a test a $t = 0$ időpillanatban a referenciaponthoz képest feltéve, hogy onnantól mozgott egyenletes v_0 sebességgel.

A már bemutatott példában nem nehéz az elmozdulásfüggvényt deriválni. Így

$$v(t) = \begin{cases} 50 & \text{ha } 0 \leq t < \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{ha } \frac{1}{2} \leq t < \frac{3}{2}, \\ -100 & \text{ha } \frac{3}{2} \leq t \leq 2, \end{cases}$$

ami teljesen egybevághat a példa szövegében megadott sebességekkel. Szeretném megjegyezni, hogy a sebesség nem létezik a $t = \frac{1}{2}$ és $t = \frac{3}{2}$ pontokban, hiszen ott s nem differenciálható.

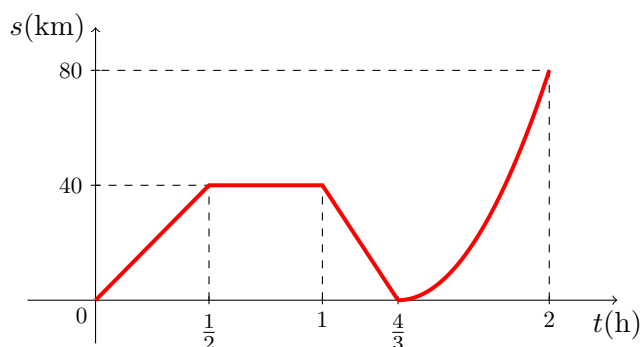
Nézzünk egy másik példát! Egy üzletember autóval utazik egy megbeszélésre egy 80 km-re lévő városba. 80 km/h egyenletes sebességgel indult, de menet közben megéhezett, és félúton megállt egy benzinkútnál. Félóra múlva indult volna tovább, amikor észrevette, hogy otthon hagyott egy fontos dokumentumot. Sietve visszafordult 120 km/h egyenletes sebességgel haladva. Amikor otthonról újra elindult, már nem egyenletes sebességgel haladt, hanem az ettől a pillanattól számított idő négyzetével arányosan. Így összességében 2 óra alatt ért oda a megbeszélésre. Határozzuk meg az elmozdulás- és a sebességfüggvényt!

Bontsuk fel a mozgást különböző szakaszokra!

- Az első részben 80 km/h egyenletes sebességgel ment a $t = 0$ időpillanattól, ezért $s(t) = 80t$. Így ment addig, amíg s értéke 40 nem lett, ami $t = \frac{1}{2}$ -kor következett be. Így $s(t) = 80t$, ha $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$.
- A második félórában állt, ezért s konstans ebben az intervallumban. A konstans értéke 40, hiszen 40 kilométerre vagyunk az indulási ponttól. Így $s(t) = 40$, ha $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$.
- Ezután visszafordult, majd egyenletes sebességgel haladt tovább, ezért ezen a szakaszon $s(t) = -120t + c$, ahol c egy konstans. Mivel $s(1) = 40$, így $40 = -120 \cdot 1 + c$, azaz $c = 160$. Tehát $s(t) = -120t + 160$. Ez a mozgás addig tartott, amíg haza nem ért. Ez az a t_0 időpillanat, amikor $s(t_0) = 0$, azaz $-120t_0 + 160 = 0$. Így $t_0 = \frac{4}{3}$. Összefoglalva: $s(t) = -120t + 160$, ha $1 \leq t \leq \frac{4}{3}$.
- Az utolsó szakasz a $t_0 = \frac{4}{3}$ időben kezdődik. Mivel ekkor az s értéke az idő négyzetével arányos, így $s(t) = c(t - \frac{4}{3})^2$, ahol c egy konstans. A c értéket az $s(2) = 80$ összefüggésből kapjuk meg, hiszen az utolsó megadott feltétel szerint a $t = 2$ időpillanatban ért oda a 80 km-re lévő városba. Tehát $c(2 - \frac{4}{3})^2 = 80$, azaz $c = 180$. Így $s(t) = 180(t - \frac{4}{3})^2$, ha $\frac{4}{3} \leq t \leq 2$.

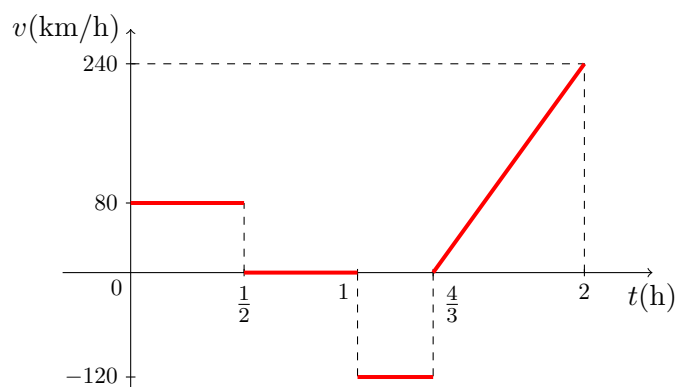
Összefoglalva

$$s(t) = \begin{cases} 80t & \text{ha } 0 \leq t < \frac{1}{2}, \\ 40 & \text{ha } \frac{1}{2} \leq t < 1, \\ -120t + 160 & \text{ha } 1 \leq t < \frac{4}{3}, \\ 180(t - \frac{4}{3})^2 & \text{ha } \frac{4}{3} \leq t \leq 2. \end{cases}$$



Ennek deriváltja a sebességfüggvény:

$$v(t) = \begin{cases} 80 & \text{ha } 0 < t < \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{ha } \frac{1}{2} < t < 1, \\ -120 & \text{ha } 1 < t < \frac{4}{3}, \\ 360(t - \frac{4}{3}) & \text{ha } \frac{4}{3} < t < 2. \end{cases}$$



Fontos megjegyezni, hogy v az I időintervallum végpontjain úgy értelmezhető, mint az s bal-, illetve jobboldali differenciálhányadosa, ami az előző példában az jelenti, hogy $v(0) = 80$ km/h és $v(2) = 240$ km/h. Azonban nem minden időpillanatban értelmezhető a sebességfüggvény. Az előző példában ez a $t = \frac{1}{2}$, $t = 1$ és $t = \frac{4}{3}$ esetekben igaz.

A mozgásnak egy másik fontos jellemzője a gyorsulás, ami a sebességváltozás mértékére utal. Beszélhetünk átlaggyorsulásról, ami két időpont között eltelt $\Delta t := t - t_0$ idő alatt történő $\Delta v := v(t) - v(t_0)$ sebességváltozás és a Δt idő aránya, azaz

$$\frac{\Delta v}{\Delta t},$$

de egy időpillanathoz tartozó gyorsulás értelmezéséhez hasonlóan fogunk eljárni, mint a sebességgel tettük.

7. Definíció. Egy egyenes pályán mozgó test pillanatnyi gyorsulása egy t_0 időpontban a sebességfüggvény differenciálhányadosa ebben az időpontban.

Az egyszerűség kedvéért a pillanatnyi gyorsulásra sokszor csak gyorsulásként hivatkozunk. A gyorsulás előjele azt mutatja, hogy a test az adott pillanatban egy gyorsuló vagy egy lassuló periódusban van. Ha a test gyorsul, akkor a sebességváltozás pozitív, és ha lassul, akkor a sebességváltozás negatív lesz.

A gyorsulás minden olyan pontban értelmezhető, ahol a v függvény differenciálható, azaz függvénynek tekinthető. Ezt a függvényt az a betűvel jelöljük, és értelmezése szerint

$$a(t) := v'(t)$$

teljesül, azaz a gyorsulásfüggvény a sebességfüggvény deriváltja.

Az egyenletes mozgáshoz hasonlóan, ha egy test állandó a_0 gyorsulással mozog egy intervallumban, akkor ott az elmozdulásfüggvény

$$v(t) = a_0 t + v_0,$$

ahol v_0 egy konstans, illetve

$$s(t) = \frac{a_0}{2} t^2 + v_0 t + s_0,$$

ahol s_0 szintén egy konstans. Könnyű ellenőrizni, hogy ekkor $s'(t) = v(t)$ és $v'(t) = a_0$. Az s_0 és v_0 értékek megfelelnek annak, hogy hol volt a test a $t = 0$ időpillanatban a referenciaponthoz képest és ott mekkora volt a sebessége, feltéve, hogy onnantól mozgott állandó a_0 gyorsulással. Vegyük észre, hogy a legutóbbi példában az autó állandó gyorsulással ment, hiszen ekkor $v(t) = 360(t - \frac{4}{3})$, és így $a(t) = 360$, azaz az autó 360 km/h^2 gyorsulással közlekedett.

Nézzünk még egy példát! Egy repülőgép felszállási sebessége 300 km/h . A kifutópályán állandó gyorsulással mozog. Mekkora ez a gyorsulás, ha a repülőgép csak $2,5 \text{ km}$ után képes felszállni?

A repülőgép a kifutópálya elején a $t = 0$ időpillanatban indul, így $s_0 = 0$ és $v_0 = 0$. Ezért

$$v(t) = a_0 t \quad \text{és} \quad s(t) = \frac{a_0}{2} t^2,$$

ahol a_0 a keresett gyorsulás. Jelölje t_0 azt az időt, ami szükséges a felszálláshoz. Ekkor

$$v(t_0) = a_0 t_0 = 300 \quad \text{és} \quad s(t_0) = \frac{a_0}{2} t_0^2 = 2,5.$$

Ebből nem nehéz kiszámolni, hogy $t_0 = \frac{1}{60}$ óra, azaz 1 perc szükséges a felszálláshoz. Így a keresett gyorsulás $a_0 = 18\,000 \text{ km/h}^2$.

Bármely fizikai mennyiségnek az idő függvényében történő megváltozása sebesség-jellegű fogalom. Gondoljunk például egy test hőmérsékletére, ami felmelegedhet vagy lehűlhet az idő haladtával. Hasonlóan gondolhatunk egy radioaktív anyag tömegére, egy tartályból kifolyó folyadék térfogatára, egy oldat koncentrációjára, amelyet folyamatosan hígítunk, és így tovább. A fizika ezt a sebességet alkalmazza törvényei megalkotásában, amelyek olyan problémákhoz vezetnek, amik túlmutatnak jelen tananyag ismeretein. Ezek az ún. differenciálegyenletek.

10. Feladatok

15. Feladat. A definíció segítségével döntjük el, hogy differenciálhatóak-e az alábbi függvények a megadott pontban! Határozza meg a differenciálhányadost, ha ez létezik!

1. $f(x) = 3x^2 - x + 1,$ $x_0 = 3,$
2. $f(x) = x^3 + x - 2,$ $x_0 = -1,$
3. $f(x) = \sqrt{x+1},$ $x_0 = 3,$
4. $f(x) = \sqrt[3]{x^2},$ $x_0 = 0,$
5. $f(x) = \frac{2}{x} + 4,$ $x_0 = 1,$
6. $f(x) = \frac{1}{x^2},$ $x_0 = -1,$
7. $f(x) = \frac{x-1}{x+2},$ $x_0 = 2,$
8. $f(x) = 5 - 2|x|,$ $x_0 = 0, x_0 = 1,$
9. $f(x) = x|x-2|,$ $x_0 = 0, x_0 = 2,$
10. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{ha } x < 0 \\ -2x & \text{ha } x \geq 0 \end{cases},$ $x_0 = 0,$
11. $f(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{ha } x < 1 \\ x + 3 & \text{ha } x \geq 1 \end{cases},$ $x_0 = 1.$

16. Feladat. Legyenek a_1, a_2, \dots, a_n valós számok, ahol $n \in \mathbf{N}$. Adjunk meg olyan $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ folytonos függvényt, amely az előbbi pontok kivételével mindeütt differenciálható!

17. Feladat. Legyen $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ egy adott függvény, x_0 egy rögzített valós szám és

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) := g(x)(x - x_0).$$

Adjunk szükséges és elégséges feltételt arra, hogy az f függvény differenciálható legyen az x_0 pontban!

18. Feladat. Legyen $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ egy adott folytonos függvény, x_0 egy rögzített valós szám és

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) := g(x)|x - x_0|.$$

Adjunk szükséges és elégséges feltételt arra, hogy az f függvény differenciálható legyen az x_0 pontban!

19. Feladat. Igazoljuk, hogy az $y = mx + n$ egyenes akkor és csak akkor érinti az $f(x) = x^2$ függvény grafikonját, ha pontosan egy közös pontja van vele!

20. Feladat. Adjunk meg olyan p és q értékeket, hogy az x tengely érintse az $f(x) = x^3 + px + q$ függvény grafikonját!

21. Feladat. Igazoljuk, hogy ha az f függvény differenciálható az a pontban, akkor

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = f'(a).$$

Mutassuk meg, hogy az állítás nem megfordítható!

22. Feladat. Adja meg a következő függvények deriváltját!

1. $f(x) = 4x^5 + 2x^3 - 8,$

2. $f(x) = 3x^6 - 2x^3 + x,$

3. $f(x) = x^2 \sqrt{x^3 \sqrt{x^3}},$

4. $f(x) = \frac{1}{x^2 \sqrt[3]{x^2}},$

5. $f(x) = 4x^5 + \frac{1}{x^3} + \frac{3}{\sqrt[3]{x}},$

6. $f(x) = \frac{2x^3 + 3x^2}{\sqrt[3]{x^4}},$

7. $f(x) = 2 \sin \frac{\pi}{4} - 4 \cos x,$

8. $f(x) = \operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x + e^{\pi+2},$

9. $f(x) = (x^3 + 5) \ln x,$

10. $f(x) = xe^x + x,$

11. $f(x) = \sqrt[4]{x} \operatorname{tg} x - \operatorname{arctg} x,$

12. $f(x) = (3 \cdot 2^x + 2^3) \sin x,$

13. $f(x) = \sqrt{x} \log_2 x + 3,$

14. $f(x) = e^x \arcsin x,$

15. $f(x) = \sin x + x^2 \cos x,$

16. $f(x) = 3 \cos x + \sqrt[4]{x} \arccos x,$

17. $f(x) = \left(x^4 - \frac{3}{x}\right) 2^x,$

18. $f(x) = (\sqrt[3]{x^2} + 2x) \cos x,$

19. $f(x) = \frac{x+1}{x-1},$

20. $f(x) = \frac{\ln x}{\cos x},$

21. $f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x},$

22. $f(x) = \frac{e^x + x}{e^x + 1},$

23. $f(x) = \frac{x^3 + 2x - 1}{\operatorname{ctg} x},$

24. $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x + x}{\sqrt{2}},$

25. $f(x) = \frac{x \ln x}{\sqrt{x+1}},$

26. $f(x) = \frac{x^2 \sin x}{\cos x + 1},$

27. $f(x) = \frac{x^3 - 1}{xe^x},$

28. $f(x) = \frac{x + \sin x}{2 - x + \cos x},$

29. $f(x) = \frac{x \arcsin x + \cos x}{\sin x - 1}$,
30. $f(x) = \frac{\log_3 x + x^2}{e^x + x + 1}$,
31. $f(x) = \left(8 - \frac{1}{x^2}\right)^5$,
32. $f(x) = \frac{1}{(\operatorname{tg} x + x - 2)}$,
33. $f(x) = \sqrt[3]{x^4 + 4x^2 - \frac{1}{x}}$,
34. $f(x) = \frac{x - x^2}{\sqrt{x^2 + 1}}$,
35. $f(x) = (3x - 2)^6 \operatorname{tg} x$,
36. $f(x) = \sin^2 x + \sin x$,
37. $f(x) = \sqrt{\sin x^3 + x \cos x}$,
38. $f(x) = e^{x^2+1}$,
39. $f(x) = x^2 e^{\cos x}$,
40. $f(x) = \frac{e^{2x} + x}{e^{\frac{x}{2}}}$,
41. $f(x) = x e^{x^2} + x^2 e^x$,
42. $f(x) = \ln(\cos x)$,
43. $f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x-3}\right)$,
44. $f(x) = \ln(x^2 \sin x)$,
45. $f(x) = \ln(2^x + 2)$,
46. $f(x) = 2^{\sin x+1}$,
47. $f(x) = \log_2\left(\frac{x+x^2}{\sqrt{x}+x}\right)$,
48. $f(x) = \frac{\log_3(x^2 - x) + x}{3 + \operatorname{tg} x}$,
49. $f(x) = \sin x^2 + x \cos x^4$,
50. $f(x) = \sin \sqrt{2^x + x^2}$,
51. $f(x) = \operatorname{tg} \frac{1}{x} \cdot e^{\operatorname{ctg} x}$,
52. $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + \ln^2 \frac{x}{2}$,
53. $f(x) = x \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}}$,
54. $f(x) = \frac{1}{(e^{\operatorname{arctg} x} + 2)^4}$,
55. $f(x) = \ln^3 \sqrt{\frac{\sin x + x}{\cos x - x}}$,
56. $f(x) = x \arcsin \sqrt{x} + \sqrt{3}$,
57. $f(x) = 10^{\ln^2 x + x e^{2x}}$,
58. $f(x) = x^2 \operatorname{arctg}(\sqrt{x} + 1)$,
59. $f(x) = \sin^3(x^2 + 1) \sqrt{x+1}$,
60. $f(x) = 2^{\frac{x}{x+1}} \sin x^2$,
61. $f(x) = \left(\sqrt{x+2} \cos x\right)^{-\frac{3}{2}}$,
62. $f(x) = \log_\pi \frac{1}{\operatorname{ctg} x + x}$,
63. $f(x) = \frac{\cos(\ln 5x)}{x^2 \ln x}$,
64. $f(x) = e^{\sin^2 x - \pi} (x + e^2)$,
65. $f(x) = \arcsin e^{x^2}$,
66. $f(x) = \ln\left(\ln^2(x^3 + 1)\right)$,
67. $f(x) = \sqrt{\operatorname{tg} \sqrt{x} 2^{x+2}}$,
68. $f(x) = \pi^{\log_2(\sqrt{x} + \frac{1}{x} - 1)}$,
69. $f(x) = \frac{\cos x^4 \operatorname{tg}(x+2)}{\cos^4 x + 2}$,
70. $f(x) = \frac{\operatorname{ctg}(x + \ln 2x)}{3\sqrt{x} + \pi^2}$.

23. Feladat. Adja meg a következő függvények deriváltját!

$$1. f(x) = \operatorname{tg} \left(\cos x + \sqrt{\sin \frac{1}{x^3}} \right) \ln \left(x - \sqrt[3]{\cos \frac{1}{x}} \right)^2,$$

$$2. f(x) = \frac{x \operatorname{tg} x e^x + \arcsin^2(2 \sin x + \pi) - \frac{1}{x}}{\sqrt{x + \pi^2} e^{\frac{x}{2}}},$$

$$3. f(x) = \sqrt[3]{x^2} 2^{(\operatorname{tg}^2 x^3 + \sin(x+\pi)^2)} (\log_2^2 x^3 + \sqrt{x^2+1}),$$

$$4. f(x) = \sqrt[3]{\frac{3^{x^2+1} \sin^3 x + \ln^2(x-e)}{\sin x \left(3 - \frac{1}{x^2}\right)}} \cdot e^{x \operatorname{arctg} x^2+8}.$$

24. Feladat. Adja meg a következő függvények deriváltját!

$$1. f(x) = x^x \quad (x > 0),$$

$$2. f(x) = x^{\sqrt{x}} \quad (x > 0),$$

$$3. f(x) = (\sin x)^{\cos x} \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right),$$

$$4. f(x) = (1 + \operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x} \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right),$$

$$5. f(x) = (\operatorname{arctg} x)^{x^2+1} \quad (x > 0),$$

$$6. f(x) = (x^3 + x)^{\ln x} \quad (x > 1),$$

$$7. f(x) = x^{x^x} \quad (x > 0).$$

25. Feladat. Adjunk szabályt a logaritmikus deriváláshoz az alap és a kitevőben szereplő függvények alapján!

26. Feladat. Adja meg az inverz kapcsolat segítségével a következő függvények deriváltját!

$$1. f(x) = \sqrt[2]{x},$$

$$2. f(x) = \sqrt[3]{x},$$

$$3. f(x) = \sqrt[5]{x^2},$$

$$4. f(x) = \ln x,$$

$$5. f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{x},$$

$$6. f(x) = \arcsin \ln x.$$

27. Feladat. Mennyi az

$$f: [0, \infty[\rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) := x^5 + x^3$$

függvény inverzének deriváltja az $y = 2$ pontban?

28. Feladat. Mennyi az

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) := x + \sin x$$

függvény inverzének deriváltja az $y = 1 + \frac{\pi}{2}$ pontban?

29. Feladat. Igazolja, hogy az

$$f(x) = \frac{1}{1 + x + \ln x} \quad (x > 0)$$

függvény kielégíti az $xf'(x) = f(x)(f(x) \ln x - 1)$ feltételt!

30. Feladat. Igazolja, hogy az

$$f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}} \quad (x \in \mathbf{R})$$

függvény kielégíti az $xf'(x) = (1 - x^2)f(x)$ feltételt!

31. Feladat. Állapítsa meg, hogy differenciálhatóak-e az alábbi függvények a megadott pontokban!

$$1. \quad f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 3 & \text{ha } x \leq 1, \\ e^{1-x} & \text{ha } x > 1 \end{cases} \quad x_0 = 1,$$

$$2. \quad f(x) = \begin{cases} \sin^2 x & \text{ha } x \leq \frac{\pi}{2}, \\ x^2 - \pi x & \text{ha } x > \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad x_0 = \frac{\pi}{2},$$

$$3. \quad f(x) = \begin{cases} e^x & \text{ha } x \leq 0, \\ x + 1 & \text{ha } 0 < x \leq 1, \\ 3 - \frac{1}{x} & \text{ha } x > 1 \end{cases} \quad x_0 = 0, x_0 = 1,$$

$$4. \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1} & \text{ha } x \leq 0, \\ 1 - x & \text{ha } 0 < x \leq 2, \\ \cos(\pi(x-1)) & \text{ha } x > 2 \end{cases} \quad x_0 = 0, x_0 = 2.$$

32. Feladat. Megadható-e olyan a és b paraméter, hogy differenciálhatóak legyenek a következő függvények?

$$1. \quad f(x) = \begin{cases} ax^3 + 2 & \text{ha } x < 0 \\ 2x + b & \text{ha } x \geq 0 \end{cases},$$

$$2. \quad f(x) = \begin{cases} a + x - x^2 & \text{ha } x < 0 \\ e^{bx} & \text{ha } x \geq 0 \end{cases},$$

$$3. \quad f(x) = \begin{cases} e^{\frac{x}{2}} + a & \text{ha } x < 0 \\ \ln(\sin x + b) & \text{ha } x \geq 0 \end{cases},$$

$$4. \quad f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx & \text{ha } x < 1 \\ \operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{2}\right) & \text{ha } x \geq 1 \end{cases}.$$

33. Feladat. Legyen $f, g:]a, b[\rightarrow \mathbf{R}$ és $x_0 \in]a, b[$. Mit tudunk mondani az $f + g$ függvény differenciálhatóságáról az x_0 pontban, ha

- (a) f differenciálható az x_0 pontban, de g nem,
- (b) sem f sem g nem differenciálható az x_0 pontban?

Mit tudunk mondani az fg függvény differenciálhatóságáról az x_0 pontban a fenti esetekben?

34. Feladat. Legyen $f, g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $x_0 \in \mathbf{R}$ és $y_0 := g(x_0)$. Mit tudunk mondani az $f \circ g$ függvény differenciálhatóságáról az x_0 pontban, ha

- (a) g differenciálható az x_0 pontban, de f nem differenciálható az y_0 pontban,
- (b) g nem differenciálható az x_0 pontban, de f differenciálható az y_0 pontban,
- (c) g nem differenciálható az x_0 pontban, és f sem differenciálható az y_0 pontban,?

35. Feladat. Legyen az f függvény differenciálható a $] - a, a[$ intervallumon. Igazolja, hogy

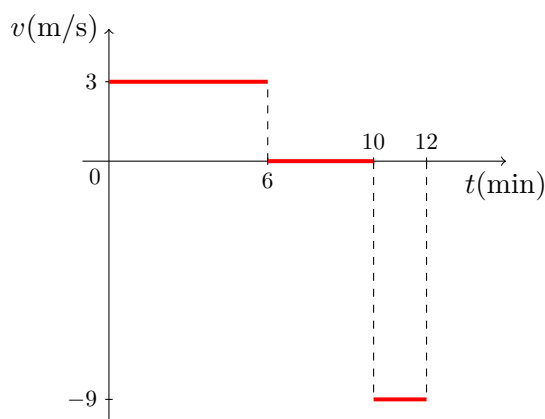
- (a) ha f páros, akkor f' páratlan függvény,
- (b) ha f páratlan, akkor f' páros függvény!

36. Feladat. Igazolja, hogy minden differenciálható, p szerint periodikus függvény deriváltja is p szerint periodikus!

37. Feladat. Egy autó útjának első felét 40 km/h átlagsebességgel tette meg. Mekkora volt a sebessége a további útszakaszon, ha az egész útra számított átlagsebessége 48 km/h volt?

38. Feladat. Egy kerékpáros a teljes út első felét 12 km/h sebességgel tette meg. A hátralévő úton egyenlő ideig haladt 6 km/h, majd 4 km/h sebességgel. Mekkora volt az egész útra számított átlagsebessége?

39. Feladat. Az ábra egy test sebesség idő diagramját mutatja. Elemezze a diagramot! Adja meg és ábrázolja az elmozdulásfüggvényt!



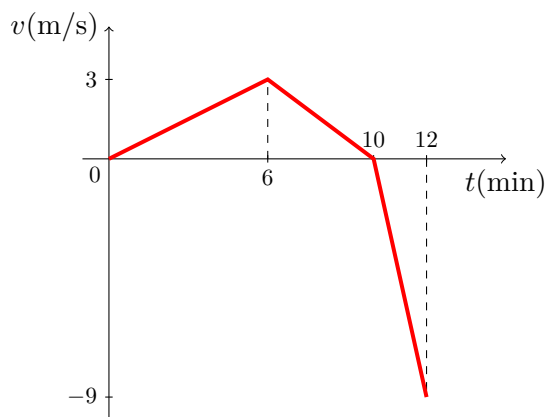
40. Feladat. Egy repülőgép a felszállás előtt 12 s-on keresztül egyenletesen gyorsít, mialatt 600 m utat fut be. Mennyi utat tett meg a repülő a felemelkedés előtti utolsó másodpercben?

41. Feladat. Két villamosmegálló közti távolság 500 m. A kocsit a gyorsítási és fékezési útszakaszokon kívül egyenletesen mozog 36 km/h sebességgel. Indulás után 30 s múlva éri el az utazási sebességet és az utolsó 50 méteren fékez. Mekkora az átlagsebessége?

42. Feladat. Egy 68,4 km/h sebességgel haladó személyautó vezetője a „padlóg” nyomja a fékpedált a megállásig. Mekkora az autó gyorsulása, ha a féknyom 40 m. Mennyi idő alatt állt meg?

43. Feladat. Egy tömegpont egyenesvonalú egyenletesen gyorsuló mozgást végez. Két, egymás után következő s hosszúságú szakaszt t_1 és t_2 idő alatt fut be. Számítsa ki a gyorsulását!

44. Feladat. Az ábra egy test sebesség idő diagramját mutatja. Elemezze a diagramot! Adja meg és ábrázolja az elmozdulásfüggvényt!



Ajánlott irodalom

- [1] Blahota István: *Kalkulus és Maxima*, egyetemi jegyzet, 2011. <http://mek.oszk.hu/09800/09846/09846.pdf>
- [2] Laczkovich Miklós és T. Sós Vera: *Valós analízis I.*, Typotex kiadó, Budapest, 2012.
- [3] Leindler László – Schipp Ferenc: *Analízis I*, Tankönyvkiadó, 1985.
- [4] Sain Márton: *Nincs királyi út! : Matematikatörténet*, Gondolat Könyvkiadó, Budapest, 1986.
- [5] Leindler László: *Analízis*, Polygon, Szeged, 2001.
- [6] Rimán János: *Matematikai analízis I*, Liceum, Eger, 2004.
- [7] Rimán János: *Matematikai analízis feladatgyűjtemény I-II*, Liceum, Eger, 2004.
- [8] Rudin Walter: *A Matematikai analízis alapjai*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978.
- [9] Szabó Tamás: *Kalkulus I. Példatár*, Polygon, Szeged, 2004.
- [10] Toledo Rodolfo: *Halmazok, relációk, függvények*, elektronikus tananyag, 2016. <http://bit.ly/toledo-tananyag-halmazok>
- [11] Toledo Rodolfo: *Valós számok*, elektronikus tananyag, 2017. http://bit.ly/toledo-tananyag-valos_szamok
- [12] Toledo Rodolfo: *Valós függvények*, elektronikus tananyag, 2018. http://bit.ly/toledo-tananyag-valos_fv
- [13] Toledo Rodolfo: *Számsorozatok és tulajdonságaik*, elektronikus tananyag, 2018. <http://bit.ly/toledo-tananyag-sorozatok-tulajd>
- [14] Toledo Rodolfo: *Határértékszámítás*, elektronikus tananyag, 2018. <http://bit.ly/toledo-tananyag-hatarszam>
- [15] Toledo Rodolfo: *Folytonos függvények*, elektronikus tananyag, 2019. http://bit.ly/toledo-tananyag-folytonos_fv
- [16] Varga Zsolt: *Mechanikai kérdések és feladatok felvételire, érettségire készülő középiskolásoknak*, kézirat, 2003. <http://vmg-erd.hu/matfiz/gyakorlo%20feladatok/gimi/Mechanika%20feladatok.PDF>

Tárgymutató

- átlagsebesség, 47
- deriválási szabályok
 - összetett függvény deriválása, 21
 - hányados deriválása, 20
 - inverz függvény deriválása, 27
 - konstans kiemelése, 17
 - szorzat deriválása, 19
 - tagok deriválása, 18
- derivált függvény, 13
 - hatvány, 13
 - konstans, 13
 - koszinusz, 24
 - kotangens, 24
 - logaritmus, 13, 17
 - szinusz, 13
 - tanges, 24
- differenciálhányados, 7
 - bal- és jobboldali, 9
 - fizikai jelentése, 47
 - geometriai jelentése, 6
- differenciálható függvény, 13
- elmozdulásfüggvény, 47
- érintőegyenes, 7
- folytonosság és differenciálhatóság, 8
- különbséghányados függvény, 6
- lányszabály, 26
- logaritmikus deriválásnak, 39
- pillanatnyi gyorsulás, 51
- pillanatnyi sebesség, 49