Határértékszámítás

Toledo Rodolfo

SZÉCHENYI 2020
Magyarország Kormánya
Európai Unió
Európai Szociális Alap
BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

Határértékszámítás

PDF fájlformátumban megjelent elektronikus tananyag

Szerző: Dr. Toledo Rodolfo Calixto, főiskolai tanár

Nyíregyházi Egyetem

Matematika és Informatika Intézet

Készült: 2018. szeptember 30.

Korrektúra: Barsy Anna

Lektorálta: Dr. Blahota István, főiskolai tanár

ISBN 978-615-6032-07-2

Készült az alábbi pályázati projekt támogatásával:
EFOP-3.5.1-16-2017-00017 „NYE-DUÁL- Új utakon a duális felsőoktatással a Nyíregyházi Egyetemen, az Északkelet-Magyarországi térség felemelkedéséért”

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

Jelen tananyagban a sorozatok határértékének meghatározásával foglalkozunk. A határérték fogalmával már a „Számsorozatok és tulajdonságaik” című tananyagban megismerkedtünk. Azonban konkrét sorozatok esetén a fogalom nem mutat utat a határérték meghatározására, hanem ezt valamilyen módon előre kellett „megsejteni”, és csak ezután lehetett igazolni a definíció alapján, hogy a megsejtett szám valóban a sorozat határértéke vagy sem. A kérdés az, hogy nincs-e ennél hatékonyabb módszer a határértékek meghatározására. A tananyag célja az ilyen módszerek részletes bemutatása különféle, típusonként osztályozott feladatokon keresztül.

A sok tétel és módszer közöl kiemelkedik a határérték és a műveletek kapcsolatáról szóló tétel. Alkalmazásának lényege, hogy a sorozatot úgy alakítjuk át, hogy képletében „ismert” sorozatok szerepeljenek véges számú alapművelet között. A tétel arról szól, hogy a határátmenet és a műveletek elvégzésének sorrendje felcserélhető, ezért a határértéket egyszerűen úgy számítjuk ki, hogy a képletbe behelyettesítjük az ismert sorozatok helyére a határértéküket, és kiszámoljuk az így kapott képlet értékét. Valójában maga a „határértékszámítás” elnevezés is ebből a módszerből született.

Természetesen először igazolni kell, hogy az ismert sorozatok határértékei azok, amik. Ismert sorozatok helyett inkább a nevezetes sorozatok elnevezést preferáljuk. Ezért a tananyag a nevezetes sorozatok vizsgálatával kezdődik, pontosabban a 2. Részben olyan „egyszerű” állításokat igazolunk, amelyeket megkönnyítik az ezt követő részben található nevezetes sorozatok határértékeinek kiszámítását. A segédállítások között azért találunk fontos tételeket. Ilyen például a Rendőr-elv, amivel sok számolást tudunk megspórolni, ha jól tudjuk ismert sorozatokkal alulról és felülről becsülni a sorozatot.

Az egyik nevezetes sorozatot azonban az 5. Részben külön tárgyaljuk majd. Ennek egyik oka az, hogy ez a sorozat egy nagyon fontos matematikai állandóhoz, az e szám bevezetéséhez vezet. A másik ok az, hogy ebben a részben szeretnénk alkalmazni a határátmenet és a műveletek, illetve a határátmenet és a gyökvonás felcserélhetőségéről szóló tételeket. Ezért ezeket hamarabb, a 4. Részben bebizonyítjuk.

Ezután már minden ismerettel rendelkezünk ahhoz, hogy konkrét határértékszámítási feladatokat tudjuk megoldani. A 6. Részben „klasszikus” feladatokkal foglalkozunk, olyanokkal amelyek feladatcsoportokba sorolhatók, megoldási módszerük egy csoporton belül egységes, és emiatt jobban kedvelik és oktatják mindenütt. Ezek a példák jól begyakorolhatók, így fontosnak tartottam sok példán keresztül bemutatni a megoldásukban alkalmazott fogásokat. Minden egyes megoldást kidolgoztam és a számításokat részleteztem.

A következő részben rekurzív sorozatok határértékével foglalkozunk. Ezek a feladatok már valamivel nehezebbek, nehéz őket „begyakorolni”, mert több esetben ötlet kell a megoldásuk megtalálásához. Azonban itt is sokszor tudjuk követni ugyanazt a sémát, miszerint először megbizonyosodunk arról, hogy a sorozat konvergens, és ezután a határátmenet és a műveletek felcserélhetőségéről szóló tétel alapján meghatározzuk a határértékét.

A 8. Részben már olyan példákkal foglalkozunk, ahol nem tudjuk közvetlenül alkalmazni a határátmenet és a műveletek felcserélhetőségét, hiszen ez nem fedi le az összes esetet. Bemutatjuk néhány ún. kritikus határértéket. További állításokat igazolunk, amivel „érdekes" határértékeket tudunk kiszámolni. Foglalkozunk nullsorozatok és végtelenhez tartó sorozatok reciprok sorozataival, illetve a korlátos és nullsorozatok szorzatával. Példákon keresztül megmutatjuk, hogyan számítjuk ki olyan határértékeket, amikor a képletben nem meghatározott számú művelet van. Végül bebizonyítjuk, hogy a számtani, mértani és harmonikus közepekből álló sorozatok az eredeti sorozat határértékéhez tartanak, és ezzel lehetőségünk nyílik jóval nehezebb problémákat megoldani. Ezzel tudjuk például igazolni, hogy az $a_n := \sqrt{n!}$ sorozat tart a végtelenhez.

A tananyag végén azt a kérdést vizsgálom, hogy a határátmenet és a műveletek felcserélhetőségről szóló tétel milyen feltételekkel alkalmazható alsó és felső határértékek esetén. Kiderült, hogy a tétel általános formájában nem igaz, de ha az egyik sorozat konvergens, akkor már igaz lesz. Az alsó és felső határérték fontos szerepet játszanak a matematikai analízisben, találkozni fogunk velük későbbi tananyagokban, ezért érdemes részletesen foglalkozni a tulajdonságaival.

A tananyag feldolgozásának módszere a már kidolgozott

1. Halmazok, relációk, függvények [9]
2. Valós számok [10]
3. Valós függvények [11]
4. Számsorozatok és tulajdonságaik [12]

című tananyagokhoz hasonló, azaz a matematikában szokásos négyes tagozódásból áll: definíció, tétel, bizonyítás, alkalmazás (feladatok). A jobb megértést elősegíti, hogy a definíciókat egyszerű példákkal szemléltetjük. A definiált fogalmakra tételeket mondunk ki és precízen bizonyítjuk ezeket. A tananyag teljes elsajátításához több mintafeladatot oldunk meg. Az utolsó részben feladatokat tűzünk ki megoldás nélkül, melyek a lehetséges gyakorlati foglalkozások anyagát képezhetik. Megoldásuk előtt javasoljuk a tananyagban megoldott feladatok tanulmányozását és megértését.

A fejezetben $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$ és $\mathbf{R}$ szimbólumokkal jelöljük a természetes, egész és valós számok halmazát. Ha külön nem jelöljük, akkor az előforduló betűk (latin, görög) mindig valós számokat jelentenek.

2. Segédállítások

Mielőtt elkezdjük az eredményeket igazolni és konkrét feladatokat megoldani, rögtön az elején szeretnék bemutatni néhány egyszerű állítást, amelyek megértése különösen nagy nehézséget nem okoz, és mégis leegyszerűsítik több fontosabb eredmény bizonyítását.

Kezdjük azzal, hogy ha egy konvergens sorozat minden eleméhez hozzáadunk egy konstans számot, vagy megszorozzunk egy konstans számmal, akkor a határértékkel is ugyanezt kell tenni. Ezt el is várjuk, hiszen szemléletesen, ha a számegyenesen egy sorozat elemeit ugyanazzal a számmal toljuk el vagy nyújtjuk, akkor a határérték „velük együtt megy”.

1. Tétel. *Legyen $\langle a_n \rangle$ egy konvergens sorozat, a és c két valós szám, illetve*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Ekkor az $\langle a_n + c \rangle$ és az $\langle c a_n \rangle$ sorozatok konvergensek, és

$$(a)\quad \lim_{n\to\infty} (a_n + c) = a + c, \qquad\qquad (b)\quad \lim_{n\to\infty} (c a_n) = ca.$$

Bizonyítás. Emlékezzünk, hogy a definíció szerint az $\langle a_n \rangle$ sorozat tart az a számhoz, ha

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbf{N} \text{ úgy, hogy ha } n > n_0, \text{ akkor } |a_n - a| < \varepsilon.$$

(a) Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges és n_0 a fenti definícióban szereplő küszöbindex. Ekkor

$$|a_n + c - (a + c)| = |a_n - a| < \varepsilon,$$

ha $n > n_0$. Ezért a határérték fogalma szerint az $\langle a_n + c \rangle$ sorozat konvergens és az $a + c$ számhoz tart.

(b) Az állítás nyilvánvaló $c = 0$ esetén. Legyen $c \neq 0$ és $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Mivel $a_n \to a$, így az $\frac{\varepsilon}{|c|}$ pozitív számhoz van olyan $n_0 \in \mathbf{N}$ küszöbindex, hogy

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{|c|}, \qquad \text{ha } n > n_0.$$

Ekkor

$$|c a_n - ca| = |c||a_n - a| = |c| \cdot \frac{\varepsilon}{|c|} < \varepsilon,$$

ha $n > n_0$. Ezért a határérték fogalma szerint az $\langle c a_n \rangle$ sorozat konvergens és az ca számhoz tart.

Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

Hasonló állítás mondható ki tágabb értelemben vett konvergencia esetén is, azaz amikor a sorozat végtelenhez vagy mínusz végtelenhez tart.

2. Tétel. *Legyen $\langle a_n \rangle$ egy végtelenhez tartó sorozat, illetve c egy valós szám. Ekkor*

$$(a) \quad \lim_{n\to\infty}(a_n + c) = \infty, \qquad (b) \quad \lim_{n\to\infty}(ca_n) = \begin{cases} \infty & \text{ha } c > 0, \\ -\infty & \text{ha } c < 0. \end{cases}$$

Másrészt, ha az $\langle a_n \rangle$ sorozat mínusz végtelenhez tart, akkor

$$(c) \quad \lim_{n\to\infty}(a_n + c) = -\infty, \qquad (d) \quad \lim_{n\to\infty}(ca_n) = \begin{cases} -\infty & \text{ha } c > 0, \\ \infty & \text{ha } c < 0. \end{cases}$$

Bizonyítás. Emlékezzünk, hogy a definíció szerint az $\langle a_n \rangle$ sorozat tart végtelenhez, ha

$$\forall k \in \mathbf{R}\text{-hez } \exists n_0 \in \mathbf{N}, \text{ hogy ha } n > n_0, \text{ akkor } a_n > k.$$

Továbbá, az $\langle a_n \rangle$ sorozat tart mínusz végtelenhez, ha

$$\forall k \in \mathbf{R}\text{-hez } \exists n_0 \in \mathbf{N}, \text{ hogy ha } n > n_0, \text{ akkor } a_n < k.$$

Vegyük észre, hogy ha a fenti definíciókban k helyett $k - c$ értéket írunk, akkor rögtön megkapjuk az (a) és (c) állítást.

Hasonlóan ha a fenti definíciókban k helyett $\frac{k}{c}$ értéket írunk ha $c > 0$, illetve $-\frac{k}{c}$ értéket írunk ha $c < 0$, akkor rögtön megkapjuk a (b) és (d) állítást.

Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

Most a határértékek és az egyenlőtlenségek közötti kapcsolaton a sor. Igazolható, hogy ha legfeljebb véges sok elemtől eltekintve egy konvergens sorozat általános tagja kisebb vagy egyenlő, mint egy másik konvergens sorozat általános tagja, akkor az első sorozat határértéke kisebb vagy egyenlő, mint a második sorozat határértéke.

3. Tétel. *Legyen $\langle a_n \rangle$ és $\langle b_n \rangle$ két olyan konvergens számsorozat, amelyre létezik egy $n_0 \in \mathbf{N}$, hogy $a_n \le b_n$ minden $n > n_0$ esetén. Ekkor*

$$\lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Bizonyítás. Jelölje

$$a := \lim_{n\to\infty} a_n \qquad \text{és} \qquad b := \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Indirekt módon tegyük fel, hogy $a > b$. Legyen $\varepsilon := \dfrac{a-b}{2}$, azaz $b+\varepsilon = a-\varepsilon$ teljesül. Mivel $a_n \to a$, így

$$\exists n_1 \in \mathbf{N}, \text{ hogy } |a_n - a| < \varepsilon, \text{ ha } n > n_1,$$

amiből azonnal következik, hogy $a - \varepsilon < a_n$, ha $n > n_1$. Hasonlóan $b_n \to b$, így

$$\exists n_2 \in \mathbf{N}, \text{ hogy } |b_n - b| < \varepsilon, \text{ ha } n > n_2,$$

amiből azonnal következik, hogy $b_n < b + \varepsilon$, ha $n > n_2$.
Ezért minden $n > \max\{n_0, n_1, n_2\}$ esetén

$$b_n < b + \varepsilon = a - \varepsilon < a_n.$$

Ez utóbbi ellentmond annak a feltételnek, hogy $a_n \le b_n$ minden $n > n_0$ esetén. Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

Az előző állításának van megfelelője tágabb értelemben vett határérték esetén. Ez úgy szól, hogy ha legfeljebb véges sok elemtől eltekintve egy végtelenhez tartó sorozat általános tagja kisebb vagy egyenlő, mint egy másik sorozat általános tagja, akkor a másik sorozat is tart a végtelenhez. Hasonlóan, ha egy mínusz végtelenhez tartó sorozat általános tagja nagyobb vagy egyenlő, mint egy másik sorozat általános tagja, akkor a másik sorozat is tart a mínusz végtelenhez. Ezt mondja ki a következő tétel.

4. Tétel. *Legyen $\langle a_n \rangle$ és $\langle b_n \rangle$ két olyan számsorozat, amelyre létezik egy $n_0 \in \mathbf{N}$, hogy $a_n \le b_n$ minden $n > n_0$ esetén. Ekkor*

(a) ha $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$,

(b) ha $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Bizonyítás. Csak az első állítást bizonyítjuk, a második hasonlóképpen igazolható.
Mivel $a_n \to \infty$, így

$$\forall k \in \mathbf{R}\text{-hez } \exists n_1 \in \mathbf{N}, \text{ hogy ha } n > n_1, \text{ akkor } a_n > k.$$

Legyen $n_2 := \max\{n_0, n_1\}$. Így, $b_n \ge a_n > k$ minden $n > n_2$ esetén, és így a definíció alapján azt igazoltuk, hogy $b_n \to \infty$. Ezzel a tétel bizonyítását igazoltuk.

A következő fontos állítás azért kapta a „Rendőr-elv” elnevezést, mert szemléletesen a következő módon lehet kimondani: ha két sorozat (két rendőr) véges sok elemtől eltekintve közrefog egy harmadik sorozatot (a gyanúsított) és együtt tartanak valahova (a kapitányságra), akkor a harmadik sorozat is ugyanoda kell tartson (a két rendőr beviszi a gyanúsítottat a kapitányságra).

5. Tétel (Rendőr-elv). *Legyen $\langle a_n\rangle$, $\langle b_n\rangle$ és $\langle c_n\rangle$ három valós számsorozat, illetve $c \in \mathbf{R}$. Ha az $\langle a_n\rangle$ és $\langle b_n\rangle$ sorozat konvergens, $a_n \to c$, $b_n \to c$ és van olyan $n_0 \in \mathbf{N}$ úgy, hogy*

$$a_n \le c_n \le b_n$$

minden $n > n_0$ esetén, akkor a $\langle c_n\rangle$ sorozat is konvergens és $c_n \to c$.

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Mivel $a_n \to c$, így

$$\exists n_1 \in \mathbf{N},\ \text{hogy}\ |a_n - c| < \varepsilon,\ \text{ha}\ n > n_1,$$

amiből azonnal következik, hogy $c - \varepsilon < a_n$, ha $n > n_1$. Hasonlóan $b_n \to c$, így

$$\exists n_2 \in \mathbf{N},\ \text{hogy}\ |b_n - c| < \varepsilon,\ \text{ha}\ n > n_2,$$

amiből azonnal következik, hogy $b_n < c + \varepsilon$, ha $n > n_2$.
Jelölje $n_3 := \max\{n_0, n_1, n_2\}$. Ekkor $n > n_3$ esetén

$$c - \varepsilon < a_n \le c_n \le b_n < c + \varepsilon,$$

azaz $|c_n - c| < \varepsilon$. Így a határérték definíciójából következik az állítás.

Végül szeretném újra kimondani három állítást, amelyek szintén jól szolgálatot tesznek a további eredmények igazolásában. A „Valós számok” című tananyagban igazoltuk néhány nevezetes egyenlőtlenséget, például a Bernoulli-féle, illetve a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséget. A Binomiális tételt már középiskolai tanulmányainkból is ismerjük, de abban a tananyagban igazoltuk is. A következőben összefoglaljuk mindhárom állítást.

Bernoulli-féle egyenlőtlenség: Legyen $x \ge -1$ egy valós szám és $n \in \mathbf{N}$. Ekkor

$$(1+x)^n \ge 1 + nx$$

és az egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $n = 1$ vagy $x = 0$.

Számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenség: Legyen $n \in \mathbf{N}$, illetve $x_1, \dots, x_n$ nem negatív valós számok. Ekkor

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \le \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

Továbbá az egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha a szóban forgó számok egyenlőek.

Binomiális tétel: Legyen a, b két valós szám és n egy pozitív egész szám. Jelölje még

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

minden $k = 0, 1, \ldots, n$ esetén. Ekkor

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

3. Nevezetes sorozatok

Középiskolai tanulmányainkban alapvetően két sorozattípussal találkoztunk: a számtani és a mértani sorozatokkal. Tananyagunkban azokat a sorozatokat tartjuk majd nevezeteseknek, amelyekből átalakítások után a itt szereplő sorozatok nagy része felírható. Ezért fogunk velük foglalkozni először úgy, hogy meghatározzuk a határértéküket akár tágabb értelemben is. Ezzel a tudással tudjuk majd összetett képlettel rendelkező sorozatok határértékét kiszámolni.

A nevezetes sorozatok vizsgálatát az

$$a_n := \frac{1}{n^\alpha}$$

sorozattal és reciprokával kezdjük.

6. Tétel. *Legyen α egy tetszőleges pozitív valós szám. Ekkor*

$$a_n := \frac{1}{n^\alpha} \to 0, \qquad \textit{és} \qquad b_n := n^\alpha \to \infty.$$

Bizonyítás. A határérték definíciója alapján fogjuk igazolni, hogy $a_n \to 0$. Legyen $\varepsilon > 0$ egy tetszőleges szám. Ekkor

$$\left|\frac{1}{n^\alpha} - 0\right| < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad n^\alpha > \frac{1}{\varepsilon} \quad \Longleftrightarrow \quad n > \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Ez azt jelenti, hogy van

$$n_0 := \max\left\{\left[\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right], 1\right\}$$

ε-tól függő küszöbindex, azaz az $\langle a_n\rangle$ sorozat konvergens és határértéke 0.

A $\langle b_n\rangle$ sorozat esetén legyen $k > 0$ egy tetszőleges szám. Ekkor

$$n^\alpha > k \quad \Longleftrightarrow \quad n > k^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Így sikerült minden $k > 0$-hoz egy

$$n_0 := \max\left\{\left[k^{\frac{1}{\alpha}}\right], 1\right\}$$

küszöbindexet találni, hogy $a_n > k$ minden $n > n_0$ esetén. Ezért a $\langle b_n\rangle$ sorozat tart végtelenhez.

Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

A fenti állítással azt is igazoltuk, hogy

$$\frac{1}{n} \to 0, \qquad \frac{1}{n^2} \to 0, \qquad \frac{1}{n^3} \to 0, \quad \dots$$

ugyanígy

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0, \qquad \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \to 0, \qquad \frac{1}{\sqrt[4]{n}} \to 0, \quad \dots$$

A fenti sorozatok reciprokai pedig a végtelenhez tartanak:

$$n \to \infty, \qquad n^2 \to \infty, \qquad n^3 \to \infty, \quad \dots$$

és

$$\sqrt{n} \to \infty, \qquad \sqrt[3]{n} \to \infty, \qquad \sqrt[4]{n} \to \infty, \quad \dots$$

A következő nevezetes sorozat a mértani sorozat.

7. Tétel. *A mértani sorozat konvergenciájára vonatkozóan a következő esetek érvényesek:*

$$q^n \begin{cases} \to \infty & \textit{ha } q > 1, \\ \to 1 & \textit{ha } q = 1, \\ \to 0 & \textit{ha } |q| < 1, \\ \textit{divergens és korlátos} & \textit{ha } q = -1, \\ \textit{divergens} & \textit{ha } q < -1. \end{cases}$$

Bizonyítás. Nézzük át egyenként az egyes eseteket.

- Legyen $q > 1$. Ekkor van olyan $x > 0$ szám, hogy $q = 1 + x$ teljesül. A Bernoulli-féle egyenlőtlenség szerint

$$q^n = (1 + x)^n \geq 1 + nx > nx \to \infty,$$

  hiszen egy végtelenhez tartó sorozat pozitív konstans-szorosa is végtelenhez tart (lasd a 2. Tétel). Így a 4. Tételből következik, hogy $q^n \to \infty$.

- Ha $q = 1$ vagy $q = 0$, akkor az állítás nyilvánvaló, hiszen ekkor a sorozat állandó értékeket vesz fel.

- Legyen $0 < |q| < 1$. Ekkor $\frac{1}{|q|} > 1$, és így van olyan $x > 0$, hogy $\frac{1}{|q|} = 1 + x$. A Bernoulli-féle egyenlőtlenség szerint

$$\left(\frac{1}{|q|}\right)^n = (1 + x)^n \geq 1 + nx > nx.$$

  Így $|q|^n < \dfrac{1}{nx}$ azaz

$$0 \leftarrow -\frac{1}{nx} < q^n < \frac{1}{nx} \to 0,$$

  hiszen a nullához tartó sorozatok konstans szorosa is nullához tartanak (lasd az 1. Tétel). Így a Rendőr-elvből következik, hogy $q^n \to 0$.

- Ha $q = -1$, akkor a „Számsorozatok és tulajdonságaik” című tananyagból tudjuk, hogy az $a_n := (-1)^n$ sorozatnak két torlódási pontja van, az 1 és a -1, azaz divergens. Másrészt korlátos, mert csak ezt a két értéket veszi fel.

- Legyen $q < -1$. Ekkor $q^2 > 1$, így a már igazolt első eset szerint $q^{2n} \to \infty$. Bontsuk fel a $\langle q^n \rangle$ sorozatot páros és páratlan indexű részsorozatokra. A páros indexű részsorozata

$$b_{2n} = q^{2n} \to \infty,$$

és a páratlan indexű részsorozata

$$b_{2n-1} = q^{2n-1} = \frac{1}{q} q^{2n} \to -\infty,$$

hiszen egy végtelenhez tartó sorozat negatív konstans-szorosa mínusz végtelenhez tart (lásd a 2. Tételt). Mivel a páros és páratlan indexű részsorozatok máshova tartanak, ezért a sorozat divergens.

Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

Ebben a részben még két nevezetes sorozatról lesz szó. Látni fogjuk, hogy az $\langle \sqrt[n]{a} \rangle$, ahol $a > 0$ és az $\langle \sqrt[n]{n} \rangle$ sorozatok 1-hez tartanak.

8. Tétel. *Legyen a egy tetszőleges pozitív szám. Ekkor*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

Bizonyítás. Három esetet különböztetünk meg:

- Legyen $a = 1$. Ekkor $\sqrt[n]{1} = 1$, azaz a sorozat 1-hez tart.

- Legyen $a > 1$. Ekkor $\sqrt[n]{a} > 1$, és így felírható

$$\sqrt[n]{a} = 1 + x_n$$

alakban, ahol $x_n > 0$. A Bernoulli-féle egyenlőtlenség szerint

$$a = (1 + x_n)^n \geq 1 + nx_n \quad \text{azaz} \quad x_n \leq \frac{a-1}{n}.$$

Ekkor az 1. Tétel szerint

$$1 < \sqrt[n]{a} = 1 + x_n \leq 1 + \frac{a-1}{n} \to 1. \tag{1}$$

Ezért a Rendőr-elvből következik, hogy $\sqrt[n]{a} \to 1$.

- Legyen $0 < a < 1$. Ekkor $\frac{1}{a} > 1$, és így az előző esetben szereplő (1) egyenlőtlenségbe írhatunk $\frac{1}{a}$-t az a helyet, azaz

$$1 < \sqrt[n]{\frac{1}{a}} \leq 1 + \frac{\frac{1}{a} - 1}{n}.$$

Ebből egyszerű átalakítás után az 1. Tétel szerint azt kapjuk, hogy

$$1 > \sqrt[n]{a} \geq \frac{1}{1 + \frac{\frac{1}{a}-1}{n}} = 1 - \frac{\frac{1}{a} - 1}{n + \frac{1}{a} - 1} > 1 - \frac{\frac{1}{a} - 1}{n} \to 1.$$

Ezért a Rendőr-elvből következik, hogy $\sqrt[n]{a} \to 1$.

Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

Az előző állítás a következő módon általánosítható.

9. Tétel. *Legyen $\langle a_n \rangle$ egy pozitív számokból álló sorozat, amely konvergens és határértéke egy pozitív szám. Ekkor*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1.$$

Bizonyítás. Jelölje $a > 0$ az $\langle a_n \rangle$ sorozat határértékét. Legyen $\varepsilon = \frac{a}{2}$. Ekkor a határérték definíciója szerint

$$\exists n_0 \in \mathbf{N}, \text{ hogy } |a_n - a| < \varepsilon = \frac{a}{2}, \text{ ha } n > n_0.$$

Azonban

$$|a_n - a| < \frac{a}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{a}{2} < a_n < \frac{3a}{2},$$

és így az előző tétel miatt, ha $n > n_0$, akkor

$$1 \leftarrow \sqrt[n]{\frac{a}{2}} < \sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{\frac{3a}{2}} \to 1.$$

Ezért a Rendőr-elv szerint igaz a tétel állítása.

A következő nevezetes sorozat az alábbi állításban található.

10. Tétel. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$

Bizonyítás. Mivel $\sqrt[n]{n} > 1$, így felírható $\sqrt[n]{n} = 1 + x_n$ alakban, ahol $x_n > 0$, ha $n > 1$. A Binomiális tétel szerint

$$n = (1 + x_n)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_n^k > \frac{n(n-1)}{2} x_n^2,$$

hiszen a fenti összeg minden tagja pozitív, ezért úgy becsüljük alulról, hogy egyetlen egy tagját tartjuk meg, a $k = 2$-re vonatkozó tagot. Ezért

$$x_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

Másrészt könnyen igazolható, hogy

$$\frac{2}{n-1} \leq \frac{4}{n},$$

ha $n > 1$. Ekkor

$$0 < x_n < \sqrt{\frac{4}{n}} = \frac{2}{\sqrt{n}} \to 0,$$

hiszen a 6. Tételből tudjuk, hogy a nevezetes sorozat $\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$. Így a Rendőr-elvből következik, hogy $x_n \to 0$, amiből az 1. Tétel alapján azt kapjuk, hogy

$$\sqrt[n]{n} = 1 + x_n \to 1.$$

Ezzel az állítást igazoltuk.

4. A határátmenet és a műveletek

Elérkeztünk ahhoz az eredményhez, ami a határértékszámítás alapja. Ennek lényege hogy ha egy sorozat előáll ismert konvergens sorozatokból véges sok számú alapművelet segítségével, akkor a sorozat határértéke kiszámolható a képletben szereplő sorozatok határértékének behelyettesítésével. Nézzük tehát mit állít pontosan a határátmenet és a műveletek kapcsolatáról szóló tétel.

11. Tétel (A határátmenet és a műveletek felcserélhetősége)**.** *Legyen $\langle a_n \rangle$ és $\langle b_n \rangle$ két konvergens valós számsorozat, valamint*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \qquad \text{és} \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = b.$$

Ekkor az $\langle a_n + b_n \rangle$, $\langle a_n - b_n \rangle$, $\langle a_n b_n \rangle$ sorozat konvergens, valamint ha $b_n \neq 0$ minden $n \in \mathbf{N}$ esetén és $b \neq 0$, akkor az $\left\langle \frac{a_n}{b_n} \right\rangle$ sorozat is konvergens és

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b,$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = a - b,$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = ab,$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}.$

Bizonyítás. A tétel igazolásához a határérték definícióját fogjuk alkalmazni.

(a) Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ekkor

$$a_n \to a \qquad \Longrightarrow \qquad \exists n_1 \in \mathbf{N},\ \text{hogy } |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{ha } n > n_1,$$

és

$$b_n \to b \qquad \Longrightarrow \qquad \exists n_2 \in \mathbf{N},\ \text{hogy } |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{ha } n > n_2.$$

Ebből $n > n_0 := \max\{n_1, n_2\}$ esetén

$$\begin{aligned} |a_n + b_n - (a+b)| &= |a_n - a + b_n - b| \leq \\ &\leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

teljesül, azaz az $\langle a_n + b_n \rangle$ sorozat konvergens és $a_n + b_n \to a + b$.

(b) Rögtön következik az előző pontban szereplő állításból, hiszen az 1. Tétel szerint $-b_n \to -b$, és így

$$a_n - b_n = a_n + (-b_n) \to a + (-b) = a - b.$$

(c) Az $\langle a_n \rangle$ sorozat korlátos, mert konvergens. Ezért

$$\exists K > 0, \text{hogy } |a_n| \leq K \text{ minden } n \in \mathbf{N} \text{ esetén.}$$

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ekkor

$$a_n \to a \quad \Longrightarrow \quad \exists n_1 \in \mathbf{N}, \text{ hogy } |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2(|b|+1)}, \quad \text{ha } n > n_1,$$

és

$$b_n \to b \quad \Longrightarrow \quad \exists n_2 \in \mathbf{N}, \text{ hogy } |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2K}, \quad \text{ha } n > n_2.$$

Ebből $n > n_0 := \max\{n_1, n_2\}$ esetén

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \leq \\ &\leq |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| < \\ &< K\frac{\varepsilon}{2K} + |b|\frac{\varepsilon}{2(|b|+1)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

teljesül, azaz az $\langle a_n b_n \rangle$ sorozat konvergens és $a_n b_n \to ab$.

(d) A $b_n \to b \neq 0$ feltételből következik, hogy az $\left\langle \frac{1}{b_n} \right\rangle$ sorozat korlátos. Valóban, az 1. Tétel szerint $\frac{b_n}{b} \to 1$, azaz $\frac{b_n}{b} > \frac{1}{2}$ legfeljebb véges sok sorozatbeli elemtől eltekintve teljesül. Azonban

$$\frac{b_n}{b} > \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad \left|\frac{b_n}{b}\right| > \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{|b|},$$

ami azt jelenti, hogy az $\left\langle \frac{1}{b_n} \right\rangle$ sorozat korlátos. Ezért

$$\exists K > 0, \text{hogy } \frac{1}{|b_n|} \leq K \text{ minden } n \in \mathbf{N} \text{ esetén.}$$

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ekkor

$$a_n \to a \quad \Longrightarrow \quad \exists n_1 \in \mathbf{N}, \text{ hogy } |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2K}, \quad \text{ha } n > n_1,$$

és

$$b_n \to b \quad \Longrightarrow \quad \exists n_2 \in \mathbf{N}, \text{ hogy } |b_n - b| < \frac{\varepsilon|b|}{2K(|a|+1)}, \quad \text{ha } n > n_2.$$

Ebből $n > n_0 := \max\{n_1, n_2\}$ esetén

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| &= \left|\frac{a_n b - a b_n}{b \cdot b_n}\right| = \left|\frac{a_n b - ab + ab - a b_n}{b \cdot b_n}\right| \leq \\ &\leq \frac{1}{|b_n|}\left(|a_n - a| + \frac{|a||b_n - b|}{|b|}\right) < \\ &< K\left(\frac{\varepsilon}{2K} + \frac{|a|}{|b|}\frac{\varepsilon|b|}{2K(|a|+1)}\right) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

teljesül, azaz az $\left\langle \frac{a_n}{b_n} \right\rangle$ sorozat konvergens és $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$.

Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

Azt igazoltuk tehát, hogy két konvergens sorozat összegének határértéke a két határérték összege, azaz

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n,$$

és ez a többi alapműveletre is igaz a nullával való osztástól eltekintve. Ezért az előző tételt úgy is fogalmazhatjuk röviden, hogy a műveletek és a határátmenet elvégzésének sorrendje felcserélhető. Fontos még megjegyezni, hogy bár a tétel két sorozattal végzet műveletről szól, teljes indukcióval nem nehéz igazolni, hogy alkalmazható véges számú sorozatot és vegyes műveleteket tartalmazó képletek esetén is.

Lássunk egy példát! A ”Számsorozatok és tulajdonságaik” című tananyagban vizsgáltuk az

$$a_n := \frac{2n-1}{n+1}$$

sorozatot konvergencia szempontjából. Ott először meg kellett sejtenünk, hogy a sorozat 2-höz tart, és utána ezt igazolni a definíció alapján. Erre már nincs szükségünk, hiszen egy egyszerű átalakítással a nevezetes sorozatok és az előző tétel alkalmazásával ki tudjuk számolni a keresett határértéket. Valóban,

$$a_n = \frac{2n-1}{n+1} = \frac{n}{n} \cdot \frac{2 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{2 - \overbrace{\frac{1}{n}}^{\to 0}}{1 + \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}} \to \frac{2-0}{1+0} = 2.$$

Nagyon fontos tudni, hogy a határátmenet és a műveletek felcserélhetőségéről szóló tétel csak meghatározott számú sorozat esetén alkalmazható. Például azt gondolnánk, hogy az

$$a_n := \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{n\text{-szer}}$$

sorozat tart a nullához, hiszen olyan sorozatokat adunk össze, amelyek tartanak a nullához. Azonban az előző sorozat minden elemének értéke 1, és így 1-hez tart.

Mi történik, ha a határátmenet és a műveletek felcserélhetőségéről szóló tétel egyik sorozata végtelenhez tart. A választ a következő tétel adja.

12. Tétel (A végtelen határérték és műveletek kapcsolata)**.** *Legyen* $\langle a_n\rangle$ *és* $\langle b_n\rangle$ *két számsorozat, illetve* $b \in \mathbf{R}$. *Ha*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \qquad \textit{és} \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = b,$$

akkor az $\langle a_n + b_n\rangle$ *és az* $\langle a_n - b_n\rangle$ *sorozat tágabb értelemben konvergens, valamint ha* $b_n \neq 0$ *minden* $n \in \mathbf{N}$ *esetén és* $b \neq 0$, *akkor az* $\langle a_n b_n\rangle$ *és az* $\left\langle \frac{a_n}{b_n}\right\rangle$ *sorozat is tágabb értelemben konvergens. Ekkor*

(a) $$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \infty,$$

(b) $$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \infty,$$

(c) $$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \begin{cases} \infty & \textit{ha } b > 0, \\ -\infty & \textit{ha } b < 0, \end{cases}$$

(d) $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} \infty & \textit{ha } b > 0, \\ -\infty & \textit{ha } b < 0. \end{cases}$$

Bizonyítás.

(a) A $\langle b_n\rangle$ sorozat korlátos, mert konvergens, ezért

$$\exists k_1, k_2 \in \mathbf{R}, \text{hogy } k_1 < b_n < k_2 \text{ minden } n \in \mathbf{N} \text{ esetén.}$$

Legyen $k > 0$ tetszőleges. Ekkor

$$a_n \to \infty \qquad \Longrightarrow \qquad \exists n_0 \in \mathbf{N}, \text{ hogy } a_n > k - k_1, \quad \text{ha } n > n_0.$$

Mivel

$$a_n + b_n > (k - k_1) + k_1 = k,$$

így a végtelen mint határérték definíciója értelmében $a_n + b_n \to \infty$ következik.

(b) Az előző pont állításából következik, hiszen a $\langle -b_n\rangle$ sorozat konvergens és

$$a_n - b_n = a_n + (-b_n).$$

(c) Igazoljuk először a $b > 0$ esetet!

$$b_n \to b > 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \exists n_1 \in \mathbf{N}, \text{ hogy } b_n > \frac{b}{2}, \quad \text{ha } n > n_1.$$

Legyen $k > 0$ tetszőleges. Ekkor

$$a_n \to \infty \qquad \Longrightarrow \qquad \exists n_2 \in \mathbf{N}, \text{ hogy } a_n > \frac{2k}{b}, \quad \text{ha } n > n_2.$$

Ezért
$$a_n b_n > \frac{2k}{b} \cdot \frac{b}{2} = k, \quad \text{ha } n > n_0 := \max\{n_1, n_2\},$$
így a végtelen mint határérték definíciója értelmében $a_n b_n \to \infty$.

A $b < 0$ esetet hasonlóan igazoljuk:
$$b_n \to b < 0 \quad \Longrightarrow \quad \exists n_1 \in \mathbf{N}, \text{ hogy } b_n < \frac{b}{2}, \quad \text{ha } n > n_1.$$
Ebből $-b_n > -\frac{b}{2} > 0$ következik, ha $n > n_1$. Legyen $k > 0$ tetszőleges. Ekkor
$$a_n \to \infty \quad \Longrightarrow \quad \exists n_2 \in \mathbf{N}, \text{ hogy } a_n > -\frac{2k}{b}, \quad \text{ha } n > n_2.$$
Ezért
$$-a_n b_n = a_n(-b_n) > \frac{-2k}{b} \cdot \frac{-b}{2} = k, \quad \text{ha } n > n_0 := \max\{n_1, n_2\},$$
azaz $a_n b_n < -k$, ha $n > n_0$, így a mínusz végtelen mint határérték definíciója értelmében $a_n b_n \to -\infty$.

(d) Azonnal következik az előző pont állításából, hiszen az $\left\langle \frac{1}{b_n} \right\rangle$ sorozat konvergens és
$$\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n}.$$

Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

Szeretném megjegyezni, hogy az előző tétel (a) és (b) pontjának teljesüléséhez elegendő $\langle b_n \rangle$ sorozat korlátossága, azaz a konvergenciája nem feltétlenül szükséges. Ez a tény a tétel bizonyításból azonnal látható, hiszen csak azt alkalmaztuk, hogy a $\langle b_n \rangle$ sorozat korlátos.

A 11. és a 12. Tétel mellett a következő állítás is fontos szerepet játszik a határértékszámításban. Azt állítjuk, hogy a határátmenet és a gyökvonás szintén felcserélhető.

13. Tétel. *Legyen $\langle a_n \rangle$ egy konvergens sorozat, amely az a valós számhoz tart, valamint $q \geq 2$ egy egész szám. Ekkor*

- *Ha q páratlan szám, akkor a $\langle \sqrt[q]{a_n} \rangle$ sorozat konvergens és a $\sqrt[q]{a}$ számhoz tart.*
- *Ha q páros szám, illetve $a \geq 0$ és $a_n \geq 0$ minden $n \in \mathbf{N}$ esetén, akkor a $\langle \sqrt[q]{a_n} \rangle$ sorozat konvergens és a $\sqrt[q]{a}$ számhoz tart*

Bizonyítás. A tétel bizonyítását több lépésben fogjuk elvégezni.

- Tegyük fel, hogy $a = 0$. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ekkor

$$a_n \to 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \exists n_0 \in \mathbf{N},\ \text{hogy } |a_n| < \varepsilon^q, \quad \text{ha } n > n_0,$$

amiből következik, hogy $|\sqrt[q]{a_n} - 0| = \sqrt[q]{|a_n|} < \varepsilon$, azaz $\sqrt[q]{a_n} \to 0$.

- Tegyük fel, hogy $a > 0$. Ekkor $\exists n_1 \in \mathbf{N}$, hogy $a_n > 0$, ha $n > n_1$. Alkalmazzuk az

$$x^q - y^q = (x-y)\left(y^{q-1} + xy^{q-2} + \cdots + x^{q-2}y + x^{q-1}\right)$$

nevezetes azonosságot! Tegyük fel, hogy $x, y > 0$, és vegyünk abszolút értéket az azonosság mindkét oldalán! Ekkor

$$|x^q - y^q| \geq |x-y| y^{q-1},$$

hiszen jobboldal értéke csökken, ha az összegből csak az y^{q-1} tagot hagyjuk meg. Ha $n > n_1$, és így $a_n > 0$, akkor az $x = \sqrt[q]{a_n}$, illetve az $y = \sqrt[q]{a}$ értékeket beírhatjuk a fenti egyenlőtlenségbe. Ekkor egy egyszerű átalakítás után azt kapjuk, hogy

$$|\sqrt[q]{a_n} - \sqrt[q]{a}| \leq \frac{\sqrt[q]{a}}{a} |a_n - a|.$$

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ekkor

$$a_n \to a \qquad \Longrightarrow \qquad \exists n_2 \in \mathbf{N},\ \text{hogy } |a_n - a| < \frac{a}{\sqrt[q]{a}}\varepsilon, \quad \text{ha } n > n_2,$$

és így ha $n > n_0 := \max\{n_1, n_2\}$, akkor

$$|\sqrt[q]{a_n} - \sqrt[q]{a}| \leq \frac{\sqrt[q]{a}}{a}|a_n - a| < \frac{\sqrt[q]{a}}{a}\frac{a}{\sqrt[q]{a}}\varepsilon = \varepsilon.$$

Ezért a határérték definíciója szerint $\sqrt[q]{a_n} \to \sqrt[q]{a}$.

- Az az eset marad még, amikor $a < 0$ és q egy páratlan szám. Ekkor állításunk azonnal következik a

$$\sqrt[q]{-x} = -\sqrt[q]{x} \qquad (x \in \mathbf{R})$$

tulajdonságból.

Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

Végül szeretném megjegyezni, hogy az előző tételben szereplő jelenség, miszerint a határátmenet és egy leképezés eredménye felcserélhető, gyakran fordul elő a matematikában. Ez a jelenség vezet minket a függvények folytonosságának fogalmához, amellyel egy későbbi tananyagban foglalkozunk majd.

5. Az e szám fogalma

Most elérkeztünk egy fontos matematikai állandó bevezetéséhez, az e szám fogalmához. Ez a szám, amelyet Euler óta jelölünk így, a matematikában különösen fontos szerepet játszik. Az e szám bevezetéséhez szükségünk van a következő eredményre.

14. Tétel. *Az* $a_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ *sorozat konvergens.*

Bizonyítás. A „Számsorozatok és tulajdonságaik" című tananyagban azt tanultunk, hogy ha egy sorozat monoton növekvő és felülről korlátos, akkor konvergens. Ezt fogjuk tehát alkalmazni a tételben szereplő sorozat esetén.

- A monotonitás igazolására vegyük az

  $$x_1 := 1+\frac{1}{n},\ x_2 := 1+\frac{1}{n},\ \ldots,\ x_n := 1+\frac{1}{n} \quad \text{és} \quad x_{n+1} := 1$$

  $n+1$ darab számot, és alkalmazzuk a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséget. Mivel a számok szorzata $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ és összegük $n+2$, így a következő egyenlőtlenséget kapjuk.

  $$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} < \frac{n+2}{n+1} = 1+\frac{1}{n+1}.$$

  Miután az $n+1$-edik hatványra emeljük a fenti egyenlőtlenséget éppen azt kapjuk, hogy $a_n < a_{n+1}$, ami azt jelenti, hogy a sorozatunk szigorúan monoton növekvő.

- A korlátosság igazolására vegyük az

  $$x_1 := 1+\frac{1}{n},\ x_2 := 1+\frac{1}{n},\ \ldots,\ x_n := 1+\frac{1}{n} \quad \text{és} \quad x_{n+1} := \frac{1}{2},\ x_{n+2} := \frac{1}{2}$$

  $n+2$ darab számot, és alkalmazzuk a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséget. Mivel a számok szorzata $\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ és összegük $n+2$, így a következő egyenlőtlenséget kapjuk.

  $$\sqrt[n+2]{\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} < \frac{n+2}{n+2} = 1.$$

  Miután az $n+2$-edik hatványra emeljük a fenti egyenlőtlenséget és megszorozzunk 4-gyel, éppen azt kapjuk, hogy $a_n < 4$, ami azt jelenti, hogy a sorozatunk felülről korlátos.

Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

Az előbbi tétel azt garantálja, hogy az

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

sorozatnak van határértéke, hiszen tudjuk, hogy minden monoton és korlátos sorozat konvergens. Egy későbbi tananyagban azt fogjuk igazolni, hogy ez a határérték egy irracionális szám, azaz nem tudjuk pontosan felírni tizedes tört alakban. Azonban ez a szám nagyon fontos szerepet játszik a matematikai analízisben, ezért érdemes valamilyen módon jelölni, ahogyan ezt a π számmal is tesszük.

1. Definíció. *Az* $a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ *sorozat határértékét e-vel jelöljük.*

Az e számot Euler-féle számnak is nevezik, mert Leonhard Euler (1707-1783) svájci matematikus volt az, aki először alkalmazta az e jelölést. Euler munkássága óriási volt. Nincs a korabeli matematikának olyan fejezete, amelyhez lényegesen ne tett volna hozzá. Számos jelölést ma is úgy használunk, ahogyan ő is tette. Például Euler javasolta először, hogy π-vel jelöljük a kör kerületének és átmérőjének arányát.

Nem tudni pontosan, hogy Euler miért éppen az e jelölést használta. Vannak, akik szerint azért, mert e az exponenciális szó kezdőbetűje. Mások szerint azért, mert az e betűt megelőző a, b, c és d betűket az akkori matematikusok gyakran jelölésre használták. De butaság lenne azt gondolni, hogy azért jelölte így, mert a neve kezdőbetűje.

Nagyon fontos megjegyezni, hogy az előzőekben nem azt igazoltuk, hogy az

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

sorozat tart az e számhoz, hanem az, hogy ez a sorozat konvergens és e-vel jelöltük a létező határértékét. A két dolog között nagy különbség van.

Későbbi tananyagokban látni fogjuk, hogy az e szám egy nagyon fontos matematikai állandó. Speciális tulajdonságai miatt a **logaritmus természetes alapjának** választották:

$$\ln x := \log_e x \qquad (x > 0).$$

Az e szám irracionális, értéke 29 jegyre megadva:

$$e \approx 2,718\,281\,828\,459\,045\,235\,360\,287\,471\,35\ldots$$

habár legtöbbször elegendő az $e \approx 2,71$ közelítés.

Az e szám bevezetésével egy újabb nevezetes sorozathoz jutunk.

15. Tétel. *Minden x valós szám esetén*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

Bizonyítás. A tétel bizonyítása elég összetett, úgy történik, hogy az állítást az egyes számhalmazokon lévő x értékekre külön bizonyítjuk. A bizonyításban felhasználjuk a határátmenet és a műveletek, valamint a határátmenet és a gyökvonás felcserélhetőségről szóló 11. és 13. Tételt.

- $x = 0$-ra igaz, mert $\left(1+\frac{0}{n}\right)^n = 1 = e^0$ minden $n \in \mathbf{N}$ esetén.
- $x = 1$ esetén pontosan az e szám fogalmát kapjuk.
- Legyen $x = p$ egy egynél nagyobb pozitív egész szám. Ekkor

$$\left(1+\frac{p}{n}\right)^n = \left(\frac{n+p}{n}\right)^n =$$
$$= \left(\frac{n+p}{n+p-1}\right)^n \left(\frac{n+p-1}{n+p-2}\right)^n \left(\frac{n+p-2}{n+p-3}\right)^n \cdots \left(\frac{n+1}{n}\right)^n. \quad (2)$$

  A fenti szorzat pontosan p darab tényezőt tartalmaz, mindegyikük külön-külön átalakítható a következő módon:

$$\left(\frac{n+k}{n+k-1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n+k-1}\right)^n =$$
$$= \left(1+\frac{1}{n+k-1}\right)^{n+k-1} \cdot \left(1+\frac{1}{n+k-1}\right)^{1-k},$$

  ahol $k = 1, 2, \ldots, p$. Az első tényező az $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ sorozat részsorozata, ezért ő is e-hez tart. A második tényezője a 11. Tétel szerint 1-hez tart, mert felírható $k-1$ darab 1-hez tartó sorozat reciprokaként. Ezért (2)-ben p darab e-hez tartó tényező van, amelynek szorzata a 11. Tétel szerint e^p-hez tart.

- Legyen $x = \frac{p}{q}$ egy pozitív racionális szám, azaz p és q pozitív egészek és $q \geq 2$. Ekkor

$$\left(1+\frac{\frac{p}{q}}{n}\right)^n = \left(1+\frac{p}{qn}\right)^n = \sqrt[q]{\left(1+\frac{p}{qn}\right)^{qn}} \to \sqrt[q]{e^p} = e^{\frac{p}{q}},$$

  hiszen a gyökben szereplő sorozat az $a_n = (1+\frac{p}{n})^n$ sorozat részsorozata, ezért ő is e^p-hez tart. Így a q-adik gyökkel együtt a 13. Tétel szerint a sorozatunk $e^{\frac{p}{q}}$-hez tart.

- Legyen x egy pozitív valós szám. Először igazolni fogjuk, hogy az

$$a_n := \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

sorozat monoton növekvő és felülről korlátos. A monotonitás igazolására vegyük az

$$x_1 := 1 + \frac{x}{n},\ x_2 := 1 + \frac{x}{n},\ \ldots,\ x_n := 1 + \frac{x}{n} \quad \text{és} \quad x_{n+1} := 1$$

$n+1$ darab számot, és alkalmazzuk a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséget. Mivel a számok szorzata $(1 + \frac{x}{n})^n$ és összegük $n + x + 1$, így a következő egyenlőtlenséget kapjuk.

$$\sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n} < \frac{n + x + 1}{n + 1} = 1 + \frac{x}{n + 1}.$$

Miután az $n + 1$-edik hatványra emeljük a fenti egyenlőtlenséget azt kapjuk, hogy $a_n < a_{n+1}$, ami azt jelenti, hogy a sorozat szigorúan monoton növekvő. A sorozat felülről korlátos, mert ha veszünk egy $p > x$ pozitív egész számot, akkor

$$a_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{p}{n}\right)^n < e^p,$$

hiszen ez utóbbi sorozat monoton növekvően tart e^p-hez. Mivel az $\langle a_n \rangle$ sorozat monoton és korlátos, ezért konvergens. Jelölje a az $\langle a_n \rangle$ sorozat határértékét. Azt fogjuk igazolni, hogy $a = e^x$.

A „Valós számok” című tananyagban foglalkoztunk a valós kitevős hatványokkal. Az ott megadott értelmezés szerint

$$e^x := \sup\{e^r : r \le x \text{ és } r \in \mathbf{Q}\}.$$

Legyen $\langle r_n \rangle$ egy racionális számokból álló sorozat, amire

$$x \le r_n \le x + \frac{1}{n}$$

teljesül. Ekkor

$$e^x \le e^{r_n} \le e^{x + \frac{1}{n}} = e^x \cdot \underbrace{\sqrt[n]{e}}_{\to 1} \to e^x,$$

amiből a Rendőr-elv alapján következik, hogy $e^{r_n} \to e^x$. Innen, mivel az exponenciális függvény monotonitása miatt $e^x \le e^r$, ha $r \ge x$, azt kapjuk, hogy

$$e^x = \inf\{e^r : r \ge x \text{ és } r \in \mathbf{Q}\}.$$

Ezért ha veszünk $r_1 < x < r_2$ két tetszőleges racionális számot, akkor a következő

$$e^{r_1} \leftarrow \left(1 + \frac{r_1}{n}\right)^n < a_n < \left(1 + \frac{r_2}{n}\right)^n \rightarrow e^{r_2}$$

összefüggés teljesül, amiből a 3. Tétel alapján következik, hogy

$$e^{r_1} \leq a \leq e^{r_2}.$$

Tehát

$$e^x = \sup\{e^r : r \leq x \text{ és } r \in \mathbf{Q}\} \leq a \leq \inf\{e^r : r \geq x \text{ és } r \in \mathbf{Q}\} = e^x,$$

amiből $a = e^x$ következik.

- Legyen $x = -y$ egy negatív valós szám, azaz $y > 0$. Ekkor

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{y}{n}\right)^n = \left(\frac{n-y}{n}\right)^n = \left(\frac{n}{n-y}\right)^{-n} = \left[\left(1 + \frac{y}{n-y}\right)^n\right]^{-1}.$$

Jelöljön p egy, az y-nál nagyobb egész számot. Ekkor

$$\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{y}{n-y}\right)^n < \left(1 + \frac{y}{n-p}\right)^n.$$

A Rendőr-elvből következik, hogy az egyenlőtlenségben szereplő középső sorozat e^y-hoz tart. Ez azért van, mert jelen bizonyítás előző pontja miatt a baloldal e^y-hoz tart, de a jobboldal is, hiszen az

$$\left(1 + \frac{y}{n-p}\right)^n = \left(1 + \frac{y}{n-p}\right)^{n-p} \cdot \left(1 + \frac{y}{n-p}\right)^p$$

átalakítás első tényezője részsorozata az $(1 + \frac{y}{n})^n$ sorozatnak, amennyiben $n > p$, ezért ez e^y-hoz tart. A másik tényezője 1-hez tart.

Minden együttvéve

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \left[\left(1 + \frac{y}{n-y}\right)^n\right]^{-1} \rightarrow [e^y]^{-1} = e^{-y} = e^x.$$

Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

Az előző eredményt a 3. Részben szereplő többi nevezetes sorozatokkal együtt alkalmazni fogjuk több sorozatok határértékek kiszámításában. Erre a következő részben kerül sor.

Megmutatjuk az

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \to e^x$$

eredmény egy pénzügyi alkalmazását, amely betekintést enged az e szám gyakorlati alkalmazásában. Ha x_0 forintot évi p%-os kamatra helyezzük a bankba, akkor egy év után

$$x_0\left(1+\frac{p}{100}\right)$$

forintot kapunk vissza. Ha havi kamattal számítjuk az évi p%-os kamatot, akkor az összeg

$$x_0\left(1+\frac{\frac{p}{100}}{12}\right)^{12}$$

forint lesz. Megpróbálhatunk napi kamattal számolni, vagy akár még jobban növelni a kamatfizetési gyakoriságot. Ha a betett összegünk egy évben egyenletesen n-szer kamatozik p%-os évi kamattal, akkor az év végén

$$x_0\left(1+\frac{\frac{p}{100}}{n}\right)^{n}$$

forintot kapunk vissza. Elég nagy n esetén az előbbi képlet helyet használhatjuk az

$$x_0 e^{\frac{p}{100}}$$

képletet, ami a sorozat határértéke. Ez olyan, mint ha a kamatfizetés technikailag minden időpillanatban megtörtént volna. Ezért ezt **folytonos kamatozásnak** nevezik.

6. Kidolgozott feladatok

Most már elegendő ismeretekkel rendelkezünk ahhoz, hogy meg tudunk oldani több határértékszámítási feladatot. Az alkalmazott fogások minél jobb elsajátítása érdekében a feladatokat különböző csoportokra bontjuk. Először megmutatjuk, mit teszünk, ha a sorozat két polinom hányadosából áll.

1. Feladat. *Határozzuk meg a következő sorozatok határértékét!*

a) $a_n = n^5 + 3n^2 - 1$, *b)* $a_n = n^2 - n^3$,

c) $a_n = \dfrac{2n^2 - n + 2}{1 - n^2}$, *d)* $a_n = \dfrac{2n^2 + 3n + 5}{n^4 + 7}$,

e) $a_n = \dfrac{1 - n^3}{2n^2 + n + 1}$, *f)* $a_n = \dfrac{n^2 + 1}{2n + 1} - \dfrac{3n^2}{6n - 1}$.

Megoldás: Egy ilyen típusú feladatot általánosan úgy oldunk meg, hogy külön-külön kiemeljük a számlálóból és a nevezőből az n legnagyobb kitevős hatványát, és egymással elosztjuk. Ekkor a képletben már csak az

$$\frac{1}{n^\alpha} \to 0 \quad \text{és} \quad n^\alpha \to \infty \qquad (\alpha > 0)$$

nevezetes sorozatok maradnak (lásd a 6. Tételt). Ezután a határátmenet a 11. és a 12. Tételek segítségével könnyen elvégezhető.

(a) $\boxed{a_n := n^5 + 3n^2 - 1}$ Kiemelünk n^5-t.

$$a_n = n^5 + 3n^2 - 1 = \underbrace{n^5}_{\to\infty}\left(1 + \underbrace{\frac{3}{n^3}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{1}{n^5}}_{\to 0}\right) \to \infty \cdot 1 = \infty.$$

(b) $\boxed{a_n := n^2 - n^3}$ Kiemelünk n^3-öt.

$$a_n = n^2 - n^3 = \underbrace{n^3}_{\to\infty}\left(\underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} - 1\right) \to \infty \cdot (-1) = -\infty.$$

(c) $\boxed{a_n := \dfrac{2n^2 - n + 2}{1 - n^2}}$

A képletben szereplő két polinom fokszáma megegyezik. Mindkettőből kiemelünk n^2-et.

$$a_n = \frac{2n^2 - n + 2}{1 - n^2} = \frac{n^2}{n^2} \cdot \frac{2 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n^2} - 1} = \frac{2 - \overbrace{\frac{1}{n}}^{\to 0} + \overbrace{\frac{2}{n^2}}^{\to 0}}{\underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0} - 1} \to \frac{2}{-1} = -2.$$

Az alkalmazott módszerből azt az általános következtetés vonható le, hogy ha a sorozat két azonos fokszámú polinom hányadosaként írható fel, akkor a sorozat határértéke a két polinom főegyütthatójának hányadosa.

(d) $\boxed{a_n := \dfrac{2n^2+3n+5}{n^4+7}}$

A képlet számlálójában lévő polinom fokszáma kisebb, mint a nevezőjében lévő polinomé. Külön kiemelünk a számlálóból n^2-et, a nevezőből pedig n^4-t.

$$a_n = \frac{2n^2+3n+5}{n^4+7} = \frac{n^2}{n^4} \cdot \frac{2+\dfrac{3}{n}+\dfrac{5}{n^2}}{1+\dfrac{7}{n^4}} = \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0} \cdot \frac{2+\overbrace{\dfrac{3}{n}}^{\to 0}+\overbrace{\dfrac{5}{n^2}}^{\to 0}}{1+\underbrace{\dfrac{7}{n^4}}_{\to 0}} \to 0 \cdot \frac{2}{1} = 0.$$

Az alkalmazott módszerből azt az általános következtetés vonható le, hogy ha a sorozat két polinom hányadosaként írható fel, és a számlálóban lévő polinom fokszáma kisebb, mint a nevezőé, akkor a sorozat határértéke nulla.

(e) $\boxed{a_n := \dfrac{1-n^3}{2n^2+n+1}}$

A képlet számlálójában lévő polinom fokszáma nagyobb, mint a nevezőjében lévő polinomé. Külön kiemelünk a számlálóból n^3-öt, a nevezőből pedig n^2-et.

$$a_n = \frac{1-n^3}{2n^2+n+1} = \frac{n^3}{n^2} \cdot \frac{\dfrac{1}{n^3}-1}{2+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}} = \underbrace{n}_{\to\infty} \cdot \frac{\overbrace{\dfrac{1}{n^3}}^{\to 0}-1}{2+\underbrace{\dfrac{1}{n}}_{\to 0}+\underbrace{\dfrac{1}{n^2}}_{\to 0}} \to \infty \cdot \frac{-1}{2} = -\infty.$$

Az alkalmazott módszerből azt az általános következtetés vonható le, hogy ha a sorozat két polinom hányadosaként írható fel és a számlálóban lévő polinom fokszáma nagyobb, mint a nevezőé, akkor a sorozat határértéke ∞, vagy $-\infty$ aszerint, hogy a két főegyüttható előjele megegyezik, vagy nem egyezik meg.

(f) $\boxed{a_n := \dfrac{n^2+1}{2n+1} - \dfrac{3n^2}{6n-1}}$

Hozzuk közös nevezőre a törteket és alkalmazzuk az előbb tanult fogásokat!

$$a_n = \frac{n^2+1}{2n+1} - \frac{3n^2}{6n-1} = \frac{(n^2+1)(6n-1)-3n^2(2n+1)}{(2n+1)(6n-1)} =$$

$$= \frac{-4n^2+6n-1}{12n^2+4n-1} = \frac{n^2}{n^2} \cdot \frac{-4+\dfrac{6}{n}-\dfrac{1}{n^2}}{12+\dfrac{4}{n}-\dfrac{1}{n^2}} = \frac{-4+\overbrace{\dfrac{6}{n}}^{\to 0}-\overbrace{\dfrac{1}{n^2}}^{\to 0}}{12+\underbrace{\dfrac{4}{n}}_{\to 0}-\underbrace{\dfrac{1}{n^2}}_{\to 0}} \to \frac{-4}{12} = -\frac{1}{3}.$$

Néhány feladatban az előző fogásokat sokkal rugalmasabban használhatók, ha az egész kitevős hatványokat úgy tekintjük, mint véges számú szorzatokat, vagy ezek reciprokait. Emiatt a határátmenet és az egész kitevős hatványozás felcserélhető, és így nem szükséges a hatványokat szétbontani a fogások alkalmazásához. Ezt látjuk a következő példában.

$$a_n := \frac{(n+1)^{10}+1}{n^2(n-1)^8} = \frac{n^{10}}{n^{10}} \cdot \frac{\frac{(n+1)^{10}}{n^{10}} + \frac{1}{n^{10}}}{\frac{(n-1)^8}{n^8}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{10} + \frac{1}{n^{10}}}{\left(\frac{n-1}{n}\right)^8} =$$

$$= \frac{\overbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{10}}^{\to 1^{10}=1} + \overbrace{\frac{1}{n^{10}}}^{\to 0}}{\underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)^8}_{\to 1^8=1}} \to \frac{1+0}{1} = 1.$$

A következő feladatcsoportban már a gyökvonás is szerepel. Például határozzuk meg az

$$a_n = \frac{\sqrt{n^4+1}-n^2}{n^2+1}$$

sorozat határértékét! Ebben az esetben a határátmenet és a gyökvonás felcserélhetőségről szóló 13. Tételt fogjuk alkalmazni. Érdemes minden egyes gyökben kiemelni az n legnagyobb hatványát és utána ezeket kiemelni a gyökökből. Ilyenkor a gyökvonás tulajdonságait használjuk. Ezek megtalálhatók a „Valós számok” című tananyagban. Kiemelés után a gyökkifejezések tartani fognak egy nem nulla számhoz, tehát csak a számítások végén foglalkozunk velük újra. A gyökökön kívüli n hatványaira kell ekkor figyelnünk, és az előző feladatcsoportban alkalmazott fogásokkal folytatni, azaz kiemelni az n legnagyobb kitevős hatványát a számlálóból és a nevezőből külön-külön. Nézzük hogyan oldjuk meg az előbbi feladatot!

$$a_n := \frac{\sqrt{n^4+1}-n^2}{n^2+1} = \frac{\sqrt{n^4\left(1+\frac{1}{n^4}\right)}-n^2}{n^2+1} = \frac{n^2\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}-n^2}{n^2+1} =$$

$$= \frac{n^2}{n^2} \cdot \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}-1}{1+\frac{1}{n^2}} = \frac{\sqrt{1+\overbrace{\frac{1}{n^4}}^{\to 0}}-1}{1+\underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0}} \to \frac{\sqrt{1}-1}{1+0} = 0.$$

Azonban ne örüljünk ennyire korán az előbb felvázolt módszernek. Próbáljuk meghatározni vele a következő, az előző feladattól alig eltérő sorozat határértékét!

$$a_n = \frac{\sqrt{n^4+1}-n^2}{n+1} = \frac{n^2}{n} \cdot \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}-1}{1+\frac{1}{n}} = \underbrace{n}_{\to\infty} \cdot \frac{\sqrt{1+\overbrace{\frac{1}{n^4}}^{\to 0}}-1}{1+\underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}} \to \infty \cdot 0 =?$$

A 12. Tételben nincs olyan eset, ami kimondja mi az $\langle a_n b_n \rangle$ sorozat határértéke, ha $a_n \to \infty$ és $b_n \to 0$. Nem véletlenül van így, hiszen ekkor semmit sem tudunk mondani általánosan (lásd a 8. Rész kritikus határértékről szóló szakaszát). Mit tudunk ekkor csinálni? Először végezzük el a következő átalakítást!

$$a_n = \frac{\sqrt{n^4+1}-n^2}{n+1} = \frac{\sqrt{n^4+1}-n^2}{n+1} \cdot \frac{\sqrt{n^4+1}+n^2}{\sqrt{n^4+1}+n^2} =$$
$$= \frac{n^4+1-n^4}{(n+1)\left(\sqrt{n^4+1}+n^2\right)} = \frac{1}{(n+1)\left(\sqrt{n^4+1}+n^2\right)}.$$

Ezzel azt érjük el, hogy nem marad kivonás a képletben, amiből a nullát kaptuk, és elkerüljük a $\infty \cdot 0$-ból adódott problémát. Ezután már a bemutatott módszerrel folytathatjuk tovább.

$$a_n = \frac{1}{(n+1)\left(\sqrt{n^4+1}+n^2\right)} = \frac{1}{(n+1)\left(n^2\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}+n^2\right)} =$$
$$= \underbrace{\frac{1}{n^3}}_{\to 0} \cdot \frac{1}{\left(1+\underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}\right)\left(\sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{n^4}}_{\to 0}}+1\right)} \to 0 \cdot \frac{1}{1\cdot(\sqrt{1}+1)} = 0.$$

2. Feladat. *Határozzuk meg a következő sorozatok határértékét!*

a) $a_n := \dfrac{\sqrt{1+4n}}{1+n}$, *b)* $a_n := \dfrac{\sqrt{3+4n^2}-n}{n+\sqrt{n^2-1}}$,

c) $a_n := \dfrac{\sqrt[3]{n^2+2n}+n}{3-\sqrt[4]{n^3+1}}$, *d)* $a_n := \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$,

e) $a_n := n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$, *f)* $a_n := \dfrac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt[3]{n^3-1}}$.

Megoldás: A feladat megoldásában alkalmazzuk az előbb bemutatott módszert, valamint a következő nevezetes azonosságokat:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b) \qquad \text{és} \qquad a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2).$$

(a) $\boxed{a_n := \dfrac{\sqrt{1+4n}}{1+n}}$

$$a_n = \frac{\sqrt{1+4n}}{1+n} = \frac{n^{\frac{1}{2}}}{n} \cdot \frac{\sqrt{\frac{1}{n}+4}}{\frac{1}{n}+1} = \underbrace{\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}}_{\to 0} \cdot \frac{\sqrt{\overbrace{\frac{1}{n}}^{\to 0}+4}}{\underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}+1} \to 0 \cdot \frac{\sqrt{4}}{0+1} = 0$$

(b) $\boxed{a_n := \dfrac{\sqrt{3+4n^2}-n}{n+\sqrt{n^2-1}}}$

$$a_n = \frac{\sqrt{3+4n^2}-n}{n+\sqrt{n^2-1}} = \frac{n\sqrt{\frac{3}{n^2}+4}-n}{n+n\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}} = \frac{n}{n}\cdot\frac{\sqrt{\overbrace{\frac{3}{n^2}}^{\to 0}+4}-1}{1+\sqrt{1-\underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0}}} \to \frac{\sqrt{4}-1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

(c) $\boxed{a_n := \dfrac{\sqrt[3]{n^2+2n}+n}{3-\sqrt[4]{n^3+1}}}$

$$a_n = \frac{\sqrt[3]{n^2+2n}+n}{3-\sqrt[4]{n^3+1}} = \frac{n^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{1+\frac{2}{n}}+n}{3-n^{\frac{3}{4}}\sqrt[4]{1+\frac{1}{n^3}}} = \frac{n}{n^{\frac{3}{4}}}\cdot\frac{\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}\sqrt[3]{1+\frac{2}{n}}+1}{\frac{3}{n^{\frac{3}{4}}}-\sqrt[4]{1+\frac{1}{n^3}}} =$$

$$= \underbrace{n^{\frac{1}{4}}}_{\to\infty}\cdot\frac{\overbrace{\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}}^{\to 0}\sqrt[3]{1+\overbrace{\frac{2}{n}}^{\to 0}}+1}{\underbrace{\frac{3}{n^{\frac{3}{4}}}}_{\to 0}-\sqrt[4]{1+\underbrace{\frac{1}{n^3}}_{\to 0}}} \to \infty\cdot\frac{0+1}{0-1} = -\infty$$

(d) $\boxed{a_n := \sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$

Az $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ nevezetes azonosság alkalmazásával

$$a_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\cdot\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} =$$

$$= \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \underbrace{\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}}_{\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}}+1} \to 0\cdot\frac{1}{\sqrt{1}+1} = 0$$

(e) $\boxed{a_n := n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)}$

Az $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ nevezetes azonosság alkalmazásával

$$a_n = n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right) = n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\cdot\frac{\sqrt{n^2+1}+n}{\sqrt{n^2+1}+n} =$$

$$= \frac{n(n^2+1-n^2)}{\sqrt{n^2+1}+n} = \frac{n}{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0}}+1} \to \frac{1}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{2}$$

(f) $\boxed{a_n := \dfrac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt[3]{n^3-1}}}$

Mindkét nevezetes azonosság alkalmazásával

$$a_n = \frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt[3]{n^3-1}} \cdot \frac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}} \cdot$$
$$\cdot \frac{\sqrt[3]{(n^3+1)^2}+\sqrt[3]{n^3+1}\sqrt[3]{n^3-1}+\sqrt[3]{(n^3-1)^2}}{\sqrt[3]{(n^3+1)^2}+\sqrt[3]{n^3+1}\sqrt[3]{n^3-1}+\sqrt[3]{(n^3-1)^2}} =$$
$$= \frac{\sqrt[3]{(n^3+1)^2}+\sqrt[3]{n^3+1}\sqrt[3]{n^3-1}+\sqrt[3]{(n^3-1)^2}}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}} =$$
$$= \underbrace{\frac{n^2}{n}}_{\to\infty} \cdot \frac{\sqrt[3]{\left(1+\overbrace{\frac{1}{n^3}}^{\to 0}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\overbrace{\frac{1}{n^3}}^{\to 0}}\sqrt[3]{1-\overbrace{\frac{1}{n^3}}^{\to 0}}+\sqrt[3]{\left(1-\overbrace{\frac{1}{n^3}}^{\to 0}\right)^2}}{\sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0}}+\sqrt{1-\underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0}}} \to \infty$$

A következő feladatcsoportban polinomok helyett n kitevős hatványok szerepelnek. Az itt alkalmazott módszerek hasonlítanak az előzőekhez, két fontos különbséggel. Az egyik az, hogy azt az n kitevős hatványt emelünk ki a képletekből, ami a legnagyobb abszolút értékű alappal rendelkezik. A másik különbség, hogy az átalakítások után olyan mértani sorozatok maradnak a képletben, amelyeknek tudjuk a határértéküket. Ebben a tekintetben két fő eset van (lásd a 7. Tételt):

$$q^n \to 0, \quad \text{ha } |q| < 1 \qquad \text{és} \qquad q^n \to \infty, \quad \text{ha } q > 1.$$

Nézzük meg hogyan határozzuk meg a következő sorozat határértékét!

$$a_n = \frac{4^n + 2\cdot 3^{n+1}}{2^{2n+1}+(-3)^n} = \frac{4^n + 6\cdot 3^n}{2\cdot 4^n + (-3)^n} = \frac{4^n}{4^n}\cdot\frac{1+6\left(\frac{3}{4}\right)^n}{2+\left(-\frac{3}{4}\right)^n} = \frac{1+6\overbrace{\left(\frac{3}{4}\right)^n}^{\to 0}}{2+\underbrace{\left(-\frac{3}{4}\right)^n}_{\to 0}} \to \frac{1}{2},$$

hiszen $\left(-\frac{3}{4}\right)^n \to 0$ és $\left(\frac{3}{4}\right)^n \to 0$, mert $-1 < -\frac{3}{4} < 1$ és $-1 < \frac{3}{4} < 1$.

Fontos megjegyezni, hogy az ilyen feladattípusnak nincs minden esetben határértéke még tágabb értelemben sem, hiszen például tudjuk, hogy az

$$a_n = (-2)^n$$

sorozat divergens, de sem végtelenhez, sem mínusz végtelenhez nem tart.

3. Feladat. *Határozzuk meg a következő sorozatok határértékét!*

a) $a_n := \dfrac{5^{n+1}+3^n}{4^n+3^{n+3}}$, *b)* $a_n := \dfrac{3^{n+1}+(-1)^n}{5^n+1}$,

c) $a_n := \dfrac{\sqrt{4^n+1}+2^{n+1}}{2^n+(-1)^{n+1}}$, *d)* $a_n := \sqrt{9^n+(-2)^n}-3^n$.

Megoldás:

(a) $\boxed{a_n := \dfrac{5^{n+1}+3^n}{4^n+3^{n+3}}}$

$$a_n = \frac{5^{n+1}+3^n}{4^n+3^{n+3}} = \frac{5\cdot 5^n+3^n}{4^n+27\cdot 3^n} = \underbrace{\frac{5^n}{4^n}}_{=\left(\frac{5}{4}\right)^n\to\infty} \cdot \frac{5+\overbrace{\left(\frac{3}{5}\right)^n}^{\to 0}}{1+27\underbrace{\left(\frac{3}{4}\right)^n}_{\to 0}} \to \infty\cdot 5 = \infty$$

(b) $\boxed{a_n := \dfrac{3^{n+1}+(-1)^n}{5^n+1}}$

$$a_n = \frac{3^{n+1}+(-1)^n}{5^n+1} = \frac{3\cdot 3^n+(-1)^n}{5^n+1} = \underbrace{\frac{3^n}{5^n}}_{=\left(\frac{3}{5}\right)^n\to 0} \cdot \frac{3+\overbrace{\left(-\frac{1}{3}\right)^n}^{\to 0}}{1+\underbrace{\left(\frac{1}{5}\right)^n}_{\to 0}} \to 0\cdot 3 = 0$$

(c) $\boxed{a_n := \dfrac{\sqrt{4^n+1}+2^{n+1}}{2^n+(-1)^{n+1}}}$

$$a_n = \frac{\sqrt{4^n+1}+2^{n+1}}{2^n+(-1)^{n+1}} = \frac{2^n\sqrt{1+\left(\frac{1}{4}\right)^n}+2\cdot 2^n}{2^n-(-1)^n} =$$

$$= \frac{2^n}{2^n}\cdot \frac{\sqrt{1+\overbrace{\left(\frac{1}{4}\right)^n}^{\to 0}}+2}{1-\underbrace{\left(-\frac{1}{2}\right)^n}_{\to 0}} \to \frac{\sqrt{1}+2}{1-0} = 3$$

(d) $\boxed{a_n := \sqrt{9^n + (-2)^n} - 3^n}$

$$a_n = \sqrt{9^n + (-2)^n} - 3^n = \left(\sqrt{9^n + (-2)^n} - 3^n\right) \frac{\sqrt{9^n + (-2)^n} + 3^n}{\sqrt{9^n + (-2)^n} + 3^n} =$$

$$= \frac{(-2)^n}{\sqrt{9^n + (-2)^n} + 3^n} = \underbrace{\left(-\frac{2}{3}\right)^n}_{\to 0} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \underbrace{\left(-\frac{2}{9}\right)^n}_{\to 0}} + 1} \to 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{1} + 1} = 0$$

Most olyan feladatokat oldunk meg, ahol n változójú polinomoknak vagy n kitevős hatványok összegének veszünk az n-edik gyökét. Az

$$a_n := \sqrt[n]{2n^3 + n^2 - 3n - 5}$$

sorozattal egy példát mutatunk az első esetre. Ebben az esetben a 8. és a 10. Tételben tanult nevezetes sorozatokra támaszkodunk, nevezetesen

$$\sqrt[n]{a} \to 1 \quad (a > 0), \qquad \text{és} \qquad \sqrt[n]{n} \to 1.$$

A javasolt módszer lényege, hogy a gyökben szereplő polinomot ügyesen becsüljük egytagú polinomokkal alulról és felülről, és utána alkalmazzuk a Rendőr-elvet.

Lássuk a konkrét lépéseket!

Nem nehéz elkészíteni a felső becslést. A polinomból elhagyjuk a negatív tagokat, és a fennmaradó pozitív tagokban szereplő kitevőket egyformára növeljük. A példában ez a következő módon történik.

$$2n^3 + n^2 - 3n - 5 < 2n^3 + n^2 \le 2n^3 + n^3 = 3n^3.$$

Az alsó becsléskor csak a legnagyobb kitevővel rendelkező pozitív tagot hagyjuk meg. Ha nincsenek negatív tagok, akkor már készen is vagyunk. Ellenkező esetben a negatív tagokat összevonjuk úgy, hogy a kitevőit egyformára növeljük. Célszerű ezeket a kitevőket a fennmaradó pozitív tagban szereplő kitevő mínusz egyre növelni, így kiemelés után a kifejezés felírható egytagú polinom és egy elsőfokú polinom szorzataként. Ez utóbbiról könnyű megállapítani, hogy mikor nagyobb vagy egyenlő mint egy. A példában is így járunk el:

$$2n^3 + n^2 - 3n - 5 > 2n^3 - 3n - 5 > 2n^3 - 3n^2 - 5n^2 = 2n^3 - 8n^2 =$$
$$= 2n^2(n - 4) \ge 2n^2,$$

ha $n - 4 \ge 1$, azaz $n \ge 5$. Ezután már nem nehéz a Rendőr-elvet alkalmazni a nevezetes sorozatok segítségével.

$$1 \leftarrow \underbrace{\sqrt[n]{2}}_{\to 1} \big(\underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1}\big)^2 = \sqrt[n]{2n^2} < \sqrt[n]{2n^3 + n^2 - 3n - 5} < \sqrt[n]{3n^3} = \underbrace{\sqrt[n]{3}}_{\to 1} \big(\underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1}\big)^3 \to 1,$$

ha $n \ge 5$. Ezért $a_n \to 1$.

Több megjegyzésem is van az előző feladattal kapcsolatban. Az első az, hogy egy polinom n-edik gyöke nem feltétlenül értelmezhető minden n pozitív egész számra. Ha a polinom főegyütthatója negatív, akkor egy bizonyos n érték után csak negatív értékeket vesz fel. Ez gondot jelent, ha n páros szám, hiszen ekkor nem tudjuk a gyököt értelmezni. Ha a polinom főegyütthatója pozitív, akkor egy bizonyos n érték után csak pozitív értékeket vesz fel, és ettől az indextől indítjuk a sorozatot. Ezért csak olyan feladatokat oldunk meg, ahol a polinom főegyütthatója pozitív, így ebben az esetben alkalmazható az előbbi módszer. A másik megjegyzésem az, hogy az előző becslések sokféle módon elkészíthetők. Itt csak egy jól begyakorolható lehetőséget mutattunk meg.

A végeredmény minden esetben 1 lesz. Ez azonnal következik egy másik megoldási módszerből, amely a 9. Tételen alapszik. A tétel azt állítja, hogy ha egy sorozat tart egy pozitív számhoz, akkor a sorozat n-edik gyöke tart egyhez. Így az n legnagyobb hatványának kiemelésével a sorozat felírható az $\sqrt[n]{n}$ hatványának és egy pozitív számhoz tartó sorozat n-edik gyökének szorzataként. Ez minden esetben egyhez tart. A példánk egy másik megoldása tehát

$$a_n = \sqrt[n]{2n^3 + n^2 - 3n - 5} = (\underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1})^3 \sqrt[n]{\underbrace{2 + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2} - \frac{5}{n^3}}_{\to 2>0}} \to 1.$$

A másik idetartozó feladattípus az n kitevős hatványok összegének n-edik gyöke. Például, határozzuk meg az

$$a_n := \sqrt[n]{5^n + 3^{n+1} - 3 \cdot 2^n + (-1)^n}$$

sorozat határértékét. A feladat megoldásához ajánlott módszer nem sokkal különbözik a polinomoknál részletesen bemutatott módszertől. Lássuk ezt a fenti példa megoldásán keresztül!

$$5^n + 3^{n+1} - 3 \cdot 2^n + (-1)^n < 5^n + 3 \cdot 3^n + 1 < 5^n + 3 \cdot 5^n + 5^n = 5 \cdot 5^n$$

Másrészt

$$\begin{aligned} 5^n + 3^{n+1} - 3 \cdot 2^n + (-1)^n &> 5^n - 3 \cdot 2^n - 1 \geq 5^n - 3 \cdot 2^n - 2^n = \\ &= 5^n - 4 \cdot 2^n = 5^n \left(1 - 4\left(\frac{2}{5}\right)^n\right) \geq \frac{5^n}{2}, \end{aligned}$$

ha $n \geq 3$, hiszen egyszerű átalakítások után azt kapjuk, hogy

$$1 - 4\left(\frac{2}{5}\right)^n \geq \frac{1}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left(\frac{5}{2}\right)^n \geq 8 \qquad \Longleftrightarrow \qquad n \geq 3.$$

Ekkor a Rendőr-elv miatt $a_n \to 5$, hiszen ha $n \geq 3$, akkor

$$5 \leftarrow \underbrace{\sqrt[n]{\frac{1}{2}}}_{\to 1} \cdot 5 = \sqrt[n]{\frac{5^n}{2}} < a_n < \sqrt[n]{5 \cdot 5^n} = \underbrace{\sqrt[n]{5}}_{\to 1} \cdot 5 \to 5.$$

De az előző feladat megoldása is leegyszerűsödik a 9. Tétel alkalmazásával.

$$a_n = \sqrt[n]{5^n + 3^{n+1} - 3\cdot 2^n + (-1)^n} = 5\sqrt[n]{\underbrace{1 + 3\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n - 3\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^n + \left(-\frac{1}{5}\right)^n}_{\to 1 > 0}} \to 5,$$

hiszen a gyök alatt szereplő mértani sorozatok tartanak a nullához.

Megjegyzem, hogy ha a gyök alatt a legnagyobb abszolút értékű alappal rendelkező hatvány pozitív, akkor a fenti módszer mindig eredményhez vezet, és az eredmény a szóban forgó alap értéke lesz. Ez látható az előző sorozat esetén, ahol 5^n a legnagyobb alapú hatvány és a sorozat határértéke 5. Ha a legnagyobb abszolút értékű alappal rendelkező hatvány negatív, akkor divergens sorozatot kapunk, ha értelmezhető egyáltalán. Például, az

$$a_n := \sqrt[n]{1 + (-5)^n}, \qquad b_n := \sqrt[n]{1 - (-5)^n},$$

sorozatok esetén az $\langle a_n \rangle$ sorozat divergens, mert az előző módszerrel igazolható, hogy a páros indexekből álló részsorozata tart 5-höz és a páratlan indexekből álló részsorozata tart -5-höz, illetve a $\langle b_n \rangle$ sorozat nem értelmezhető, ha n páros szám. Ezért a továbbiakban ilyen sorozatok nem kerülnek szóba.

Azonban előfordulhat, hogy a sorozatban a legnagyobb abszolút értékű alapból van pozitív és negatív is, mégis a sorozat konvergens. Ilyen az

$$a_n := \sqrt[n]{3\cdot 2^n + (-2)^n}$$

sorozat. Bontsuk fel a sorozatot páros és páratlan indexű részsorozatokra!.

$$b_n^{(1)} := a_{2n} = \sqrt[2n]{4\cdot 2^{2n}} \to 2 \qquad \text{és} \qquad b_n^{(2)} := a_{2n-1} = \sqrt[2n-1]{2\cdot 2^{2n-1}} \to 2.$$

Ez azt jelenti, hogy a sorozat tart 2-höz. De az ilyen típusú sorozatok nem minden esetben konvergensek. Például, ha az

$$a_n := \sqrt[n]{2^n + (-2)^n}$$

sorozatot felbontjuk

$$b_n^{(1)} := a_{2n} = \sqrt[2n]{2\cdot 2^{2n}} \to 2 \qquad \text{és} \qquad b_n^{(2)} := a_{2n-1} = \sqrt[2n-1]{0} = 0 \to 0$$

páros és páratlan indexű részsorozatokra, akkor azt látjuk, hogy a sorozat divergens. Hasonlóan igazolható, hogy az

$$a_n := \sqrt[n]{2^n + 3(-2)^n}, \qquad b_n := \sqrt[n]{2^n - 3(-2)^n},$$

sorozatok esetén az $\langle a_n \rangle$ sorozat divergens, és a $\langle b_n \rangle$ sorozat nem értelmezhető, ha n páros szám.

Mi történik, ha olyan sorozattal állunk szemben, ahol a gyökben polinomok és n kitevős hatványok is szerepelnek? Ekkor a 9. Tételen alapuló megoldási módszert ajánlom, hiszen a következő részben látni fogjuk, hogy $n^\alpha q^n \to 0$, ha $|q| < 1$ és $\alpha > 0$ (lásd a 16. Tételt).

Például a következő sorozat határértékét az alábbi módon tudjuk meghatározni:

$$a_n := \sqrt[n]{5 \cdot 7^n + 7 \cdot n^5} = 7\sqrt[n]{\underbrace{5 + \overbrace{7 \cdot n^5 \left(\frac{1}{7}\right)^n}^{\to 0}}_{\to 5>0}} \to 7.$$

4. Feladat. *Határozzuk meg a következő sorozatok határértékét!*

a) $a_n := \sqrt[2n]{n^5 - n^3 + (-1)^n}$, *b)* $a_n := \sqrt[n]{4^n - 2^n - (-3)^n}$,

c) $a_n := \sqrt[n]{2n - n^3 + \frac{2^n}{n}}$, *d)* $a_n := \sqrt[n]{2 \cdot 3^n + (-3)^n - n^2}$.

Megoldás: A feladat megoldásában alkalmazzuk az előbb bemutatott módszereket.

(a) $\boxed{a_n := \sqrt[2n]{n^5 - n^3 + (-1)^n}}$

Mivel

$$n^5 - n^3 + (-1)^n < n^5 + 1 \le n^5 + n^5 = 2n^5$$

és

$$n^5 - n^3 + (-1)^n \ge n^5 - n^3 - 1 \ge n^5 - n^4 - n^4 = n^5 - 2n^4 =$$
$$= n^4(n-2) \ge n^4$$

ha $n \ge 3$, ezért

$$1 \leftarrow (\underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1})^4 = \sqrt[n]{n^4} < \sqrt[n]{n^5 - n^3 + (-1)^n} < \sqrt[n]{2n^5} = \underbrace{\sqrt[n]{2}}_{\to 1}(\underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1})^5 \to 1.$$

Ebből a Rendőr-elv alapján az következik, hogy

$$\sqrt[n]{n^5 - n^3 + (-1)^n} \to 1, \tag{3}$$

és így a 13. Tétel szerint

$$\sqrt[2n]{n^5 - n^3 + (-1)^n} = \sqrt{\sqrt[n]{n^5 - n^3 + (-1)^n}} \to \sqrt{1} = 1.$$

Szeretném megjegyezni, hogy (3) egyszerűbben igazolható a 9. Tétel segítségével. Valóban

$$\sqrt[n]{n^5 - n^3 + (-1)^n} = (\underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1})^5 \sqrt[n]{\underbrace{1 - \frac{1}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n^5}}_{\to 1>0}} \to 1.$$

(b) $\boxed{a_n := \sqrt[n]{4^n - 2^n - (-3)^n}}$

Igaz, hogy

$$4^n - 2^n - (-3)^n < 4^n + 3^n \leq 4^n + 4^n = 2 \cdot 4^n$$

és

$$4^n - 2^n - (-3)^n \geq 4^n - 2^n - 3^n \geq 4^n - 3^n - 3^n = 4^n - 2 \cdot 3^n =$$
$$= 4^n \left(1 - 2\left(\frac{3}{4}\right)^n\right) \geq \frac{4^n}{2},$$

ha $n \geq 5$, hiszen

$$1 - 2\left(\frac{3}{4}\right)^n \geq \frac{1}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left(\frac{4}{3}\right)^n \geq 4 \qquad \Longleftrightarrow \qquad n \geq 5.$$

Emiatt

$$4 \leftarrow \underbrace{\sqrt[n]{\frac{1}{2}}}_{\to 1} \cdot 4 = \sqrt[n]{\frac{4^n}{2}} < \sqrt[n]{4^n - 2^n - (-3)^n} < \sqrt[n]{2 \cdot 4^n} = \underbrace{\sqrt[n]{2}}_{\to 1} \cdot 4 \to 4.$$

Ebből a Rendőr-elv alapján az következik, hogy

$$\sqrt[n]{4^n - 2^n - (-3)^n} \to 4.$$

Az előző feladathoz hasonlóan most is egyszerűbben meg tudjuk oldani a feladatot a 9. Tétel segítségével. Valóban

$$\sqrt[n]{4^n - 2^n - (-3)^n} = 4 \sqrt[n]{\underbrace{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{-3}{4}\right)^n}_{\to 1 > 0}} \to 4.$$

(c) $\boxed{a_n := \sqrt[n]{2n - n^3 + \frac{2^n}{n}}}$

A 9. Tétel alapján:

$$a_n := \sqrt[n]{2n - n^3 + \frac{2^n}{n}} = \underbrace{\frac{2}{\sqrt[n]{n}}}_{\to 2} \sqrt[n]{\underbrace{2\,\overbrace{n^2\left(\frac{1}{2}\right)^n}^{\to 0} - \overbrace{n^4\left(\frac{1}{2}\right)^n}^{\to 0} + 1}_{\to 1 > 0}} \to 2,$$

hiszen $n^\alpha q^n \to 0$, ha $|q| < 1$ és $\alpha > 0$.

(d) $\boxed{a_n := \sqrt[n]{2 \cdot 3^n + (-3)^n - n^2}}$

Bontsuk fel a sorozatot páros és páratlan indexű részsorozatokra.

$$b_n^{(1)} := a_{2n} = \sqrt[2n]{2 \cdot 3^{2n} + 3^{2n} - (2n)^2} = \sqrt[2n]{3 \cdot 3^{2n} - (2n)^2}$$

Ez pedig részsorozata a

$$\sqrt[n]{3 \cdot 3^n - n^2} = 3\sqrt[n]{\underbrace{3 - \overbrace{n^2\left(\frac{1}{3}\right)^n}^{\to 0}}_{\to 3>0}} \to 3$$

sorozatnak. Ezért $b_n^{(1)} \to 3$.

Másrészt

$$b_n^{(2)} := a_{2n-1} = \sqrt[2n-1]{2 \cdot 3^{2n-1} - 3^{2n-1} - (2n-1)^2} =$$
$$= \sqrt[2n-1]{3^{2n-1} - (2n-1)^2}$$

Ez pedig részsorozata a

$$\sqrt[n]{3^n - n^2} = 3\sqrt[n]{\underbrace{1 - \overbrace{n^2\left(\frac{1}{3}\right)^n}^{\to 0}}_{\to 1>0}} \to 3$$

sorozatnak. Ezért $b_n^{(2)} \to 3$.

Mivel a páros és páratlan indexű részsorozatok 3-hoz tartanak, így az a_n sorozat is 3-hoz tart.

Elérkeztünk az utolsó feladatcsoporthoz. Ez az e szám fogalmához és a 15. Tételben igazolt

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \to e^x \qquad (x \in \mathbf{R})$$

nevezetes határértékhez kapcsolódik. Olyan feladatokat fogunk megoldani, ahol a fenti nevezetes sorozatot megfelelő átalakításokkal megtaláljuk a feladat képletében. Például, határozzuk meg az

$$a_n := \left(\frac{2n+3}{2n-1}\right)^{3n+2}$$

sorozat határértékét!

Célszerű a sorozatot az alábbi módon átalakítani és keresni benne az előbb említett nevezetes sorozatot:

$$\left(\frac{2n+3}{2n-1}\right)^{3n+2} = \left[\left(\frac{2n+3}{2n-1}\right)^n\right]^3 \left(\frac{2n+3}{2n-1}\right)^2 = \left[\left(\frac{2n}{2n}\cdot\frac{1+\frac{3}{2n}}{1-\frac{1}{2n}}\right)^n\right]^3 \left(\frac{1+\frac{3}{2n}}{1-\frac{1}{2n}}\right)^2 =$$

$$= \left[\frac{\left(1+\frac{\frac{3}{2}}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{-\frac{1}{2}}{n}\right)^n}\right]^3 \left(\frac{1+\frac{3}{2n}}{1-\frac{1}{2n}}\right)^2 \to \left[\frac{e^{\frac{3}{2}}}{e^{-\frac{1}{2}}}\right]^3 \cdot 1^2 = e^6.$$

5. Feladat. *Határozzuk meg a következő sorozatok határértékét!*

a) $a_n := \left(\dfrac{n-1}{n+2}\right)^{2n}$, *b)* $a_n := \left(\dfrac{n-1}{2n+1}\right)^{n-2}$,

c) $a_n := \left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^{n}$, *d)* $a_n := \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{n^2}$.

Megoldás: A feladat megoldásában alkalmazzuk az előbb bemutatott módszert.

(a) $\boxed{a_n := \left(\dfrac{n-1}{n+2}\right)^{2n}}$

$$a_n = \left[\left(\frac{n-1}{n+2}\right)^n\right]^2 = \left[\left(\frac{n}{n}\cdot\frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}\right)^n\right]^2 = \left[\frac{\left(1+\frac{-1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n}\right]^2 \to \left[\frac{e^{-1}}{e^2}\right]^2 = \frac{1}{e^6}.$$

(b) $\boxed{a_n := \left(\dfrac{n-1}{2n+1}\right)^{n-2}}$

$$a_n = \left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n \left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^{-2} = \left(\frac{n}{2n}\cdot\frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{2n}}\right)^n \left(\frac{2+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{\left(1+\frac{-1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{\frac{1}{2}}{n}\right)^n} \left(\frac{2+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}}\right)^2 \to 0\cdot\frac{e^{-1}}{e^{\frac{1}{2}}}\cdot\left(\frac{2}{1}\right)^2 = 0.$$

(c) $\boxed{a_n := \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n}$

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e^{-1}e = 1.$$

A feladat a 9. Tétel segítségével is megoldható. Valóban

$$a_n = \sqrt[n]{\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}$$

és a gyökben lévő sorozat részsorozata a

$$b_n := \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

sorozatnak, ami e^{-1}-hez tart. Mivel $e^{-1} > 0$, és a gyökben lévő sorozat e^{-1}-hez tart, így a 9. Tétel szerint $a_n \to 1$.

(d) $\boxed{a_n := \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n^2}}$

Vegyük észre, hogy

$$a_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n^2} = \left[\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n\right]^n.$$

Jelölje

$$b_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n.$$

Az eddig alkalmazott módszerrel nem nehéz igazolni, hogy $b_n \to e^{-2}$. Ez azt jelenti, hogy van olyan $n_0 \in \mathbf{N}$, hogy $e^{-3} < b_n < e^{-1}$, ha $n > n_0$. Mivel $a_n = b_n^n$, így alkalmazhatjuk a Rendőr-elvet és a mértani sorozatok határértékére vonatkozó tételt:

$$0 \leftarrow (e^{-3})^n < a_n < (e^{-1})^n \to 0,$$

amiből következik, hogy $a_n \to 0$.

7. Rekurzív sorozatok határértéke

A rekurzió olyan összefüggés, amely megadja, hogyan kapható meg a sorozat n-edik elemét bizonyos n-nél kisebb indexű sorozatbeli elemekből, feltéve, hogy ismerünk elég elemet a sorozat elejéről. Például az

$$a_1 := 1, \qquad a_{n+1} := \sqrt{1+a_n} \quad (n \geq 1) \tag{4}$$

egy rekurzív módon megadott sorozat. Hogyan tudnánk meghatározni egy ilyen sorozat határértékét?

Az ilyen feladatokat általában úgy oldunk meg, hogy előbb bebizonyítjuk a sorozat konvergenciáját. Ez többféle módon történhet, de gyakran azt igazoljuk, hogy a sorozat monoton és korlátos, amiből a konvergencia következik. Ebben segítséget nyújthat a teljes indukció módszer. Ezután a sorozat még ismeretlen határértékét a-val jelöljük, és a határátmenet és a műveletek felcserélhetőségéről szóló 11. Tétel alapján határátmenetet képzünk a rekurziós képlet mindkét oldalán, amiből az a érték kiszámítható.

Lássuk, hogyan alkalmazható mindez a fenti sorozat esetében!

- A sorozat felülről korlátos és minden eleme kisebb, mint 2. Ezt teljes indukcióval fogjuk igazolni.
  - Az állítás $n = 1$ esetén igaz, hiszen $a_1 = 1 < 2$.
  - Tegyük fel, hogy az állítás valamely n pozitív egész számra teljesül, azaz $a_n < 2$. Ekkor
    $$a_{n+1} = \sqrt{1+a_n} < \sqrt{1+2} = \sqrt{3} < 2.$$
    Tehát az állítás az $n+1$ pozitív egész számra is teljesül.

  Ezért teljes indukció alapján az állítás minden n pozitív egész számra teljesül.
- A sorozat monoton növekvő, azaz minden n pozitív egész számra igaz, hogy
  $$a_{n+1} - a_n \geq 0.$$
  Ezt szintén teljes indukcióval fogjuk igazolni.
  - Az állítás $n = 1$ esetén igaz, hiszen $a_2 - a_1 = \sqrt{2} - 1 > 0$.
  - Tegyük fel, hogy az állítás valamely n pozitív egész számra teljesül, azaz $a_{n+1} - a_n \geq 0$. Ekkor
    $$\begin{aligned} a_{n+2} - a_{n+1} &= \sqrt{1+a_{n+1}} - \sqrt{1+a_n} = \\ &= \left(\sqrt{1+a_{n+1}} - \sqrt{1+a_n}\right)\frac{\sqrt{1+a_{n+1}} + \sqrt{1+a_n}}{\sqrt{1+a_{n+1}} + \sqrt{1+a_n}} = \\ &= \frac{a_{n+1} - a_n}{\sqrt{1+a_{n+1}} + \sqrt{1+a_n}} \geq 0. \end{aligned}$$
    Tehát az állítás az $n+1$ pozitív egész számra is teljesül.

  Ezért teljes indukció alapján az állítás minden n pozitív egész számra teljesül.

- Jelölje a az a_n sorozat határértékét. Ekkor

$$\underbrace{a_{n+1}}_{\to a} = \sqrt{1 + \underbrace{a_n}_{\to a}},$$

amiből $a = \sqrt{1+a}$ következik. Az egyenlet megoldása

$$a = \sqrt{1+a} \qquad \Longrightarrow \qquad a^2 - a - 1 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad a_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Mivel $a > 0$, ezért a (4) összefüggéssel megadott sorozat határértéke $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Vegyük észre, hogy az előző sorozat határértéke meggyezik a

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}$$

többször egymásba ágyazott képlet eredményével!

6. Feladat. *Határozzuk meg a következő rekurzív módon megadott sorozatok határértékét!*

a) $a_1 := 0, \qquad a_{n+1} := \dfrac{1}{4} + a_n^2 \quad (n \geq 1),$

b) $a_1 := \alpha, \qquad a_{n+1} := \dfrac{1}{k}\left((k-1)a_n + \dfrac{\alpha}{a_n^{k-1}}\right) \quad (n \geq 1,\ \alpha > 0,\ 1 < k \in \mathbf{N}),$

c) $a_1 := 0, \qquad a_{n+1} := \dfrac{2}{1+a_n} \quad (n \geq 1).$

Megoldás:

a) A rekurziós képletből azonnal látható, hogy $a_n > 0$, ha $n > 1$. Ekkor a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenség alkalmazásával

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{4a_n} + a_n \geq 2\sqrt{\frac{1}{4a_n} \cdot a_n} = 1$$

teljesül, amiből következik, hogy a sorozat monoton növekvő. Teljes indukcióval könnyen igazolható, hogy a sorozat felülről korlátos és $a_n < \frac{1}{2}$ minden $n \in \mathbf{N}$ esetén. Valóban az állítás $n = 1$-re igaz, hiszen $a_1 = 0$. Tóvábba, ha feltételezzük, hogy valamely n pozitív egész számra $a_n < \frac{1}{2}$, akkor

$$a_{n+1} = \frac{1}{4} + a_n^2 < \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2},$$

azaz az állítás $n+1$-re is igaz. Ezért teljes indukció alapján az állítás minden n pozitív egész számra teljesül.

Mivel a sorozat monoton növekvő és felülről korlátos, így konvergens. Jelölje a az a_n sorozat határértékét. Ekkor

$$\underbrace{a_{n+1}}_{\to a} = \frac{1}{4} + \underbrace{a_n^2}_{\to a^2},$$

amiből $a = \frac{1}{4} + a^2$ következik. Az egyenlet megoldása $a = \frac{1}{2}$, ezért ez a sorozat határértéke is.

b) A feltétek mellett az

$$a_{n+1} := \frac{1}{k}\left((k-1)a_n + \frac{\alpha}{a_n^{k-1}}\right), \qquad a_1 := \alpha$$

sorozat alulról korlátos, hiszen teljes indukcióval nagyon könnyen igazolható, hogy $a_n > 0$ minden $n \in \mathbf{N}$ esetén. Azonban a nullánál jobb alsó korlátot tudunk megadni a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenség segítségével. Ehhez vegyük az

$$x_1 := a_n,\ x_2 := a_n,\ \ldots,\ x_{k-1} := a_n \quad \text{és} \quad x_k := \frac{\alpha}{a_n^{k-1}}$$

k darab pozitív számot. Mivel a számok számtani közepe a rekurziós képletben szereplő

$$\frac{1}{k}\left((k-1)a_n + \frac{\alpha}{a_n^{k-1}}\right)$$

szám és mértani közepe $\sqrt[k]{\alpha}$, ezért $a_{n+1} \geq \sqrt[k]{\alpha}$ minden $n \in \mathbf{N}$ esetén. Vagy ami ezzel ekvivalens: $a_n \geq \sqrt[k]{\alpha}$, ha $n \geq 2$.

A sorozat monoton csökkenő a második elemtől, hiszen az előző miatt $a_n^k \geq \alpha$, ha $n \geq 2$, és így

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{k}\left(k - 1 + \frac{\alpha}{a_n^k}\right) \leq \frac{1}{k}\left(k - 1 + \frac{\alpha}{\alpha}\right) = 1,$$

azaz $a_{n+1} \leq a_n$, ha $n \geq 2$. A monotonitás és a korlátosság együttes teljesülésből következik, hogy az $\langle a_n \rangle$ sorozat konvergens.

Jelölje a az a_n sorozat határértékét. Ekkor

$$\underbrace{a_{n+1}}_{\to a} = \frac{1}{k}\left((k-1)\underbrace{a_n}_{\to a} + \overbrace{\frac{\alpha}{a_n^{k-1}}}^{\to \frac{\alpha}{a^{k-1}}}\right)$$

amiből

$$a = \frac{1}{k}\left((k-1)a + \frac{\alpha}{a^{k-1}}\right)$$

következik. Az egyenlet megoldása $a = \sqrt[k]{\alpha}$, ami a keresett határérték.

c) Az

$$a_{n+1} := \frac{2}{1+a_n}, \qquad a_1 := 0$$

sorozat sajnos nem monoton. Erről könnyedén meg tudunk bizonyosodni, hiszen a páros indexű elemek 1-nél nagyobbak és a páratlan indexű elemek 1-nél kisebbek. Azt fogjuk belátni, hogy a páros indexű részsorozata monoton csökkenő, és a páratlan indexű részsorozata monoton növekvő. Vegyük észre először, hogy a második elemtől kezdődően a sorozat elemei pozitívak, és ez teljes indukcióval nagyon könnyen igazolható. Végezzük el a következő átalakítást!

$$a_{n+2} = \frac{2}{1+a_{n+1}} = \frac{2}{1+\frac{2}{1+a_n}} = 2 \cdot \frac{a_n+1}{a_n+3}.$$

Ez az jelenti, hogy a páros és páratlan indexű részsorozatok eleget tesznek ugyanannak az

$$a_{n+2} = 2 \cdot \frac{a_n+1}{a_n+3} \tag{5}$$

rekurzív képletnek. A különbség köztük az, hogy a páratlan indexű részsorozat 0-ból és a páros indexű részsorozat 2-ből indul. Továbbá

$$a_{n+2} - a_n = 2\frac{a_n+1}{a_n+3} - a_n = \frac{(a_n+2)(1-a_n)}{a_n+3}.$$

Ha az n páros szám, akkor $a_n > 1$, és így a jobboldal negatív. Ezért a páros indexű részsorozat szigorúan monoton csökkenő és alulról korlátos. Ha az n páratlan szám, akkor $a_n < 1$, és így a jobboldal pozitív. Ezért a páratlan indexű részsorozat szigorúan monoton növekvő és felülről korlátos. Így mindkét részsorozat konvergens.
Jelölje a_1 a páros, a_2 pedig a páratlan indexű részsorozat határértékét! Ekkor a_1 és a_2 kielégíti az (5) egyenlőség határátmenetéből kapott

$$a = 2 \cdot \frac{a+1}{a+3}$$

egyenletet. Ennek két megoldása $a = -2$ és $a = 1$. Mivel pozitív tagú sorozatról van szó, ezért $a = 1$ az egyedüli érték, ami szóba jöhet. Ez azt jelenti, hogy $a_1 = a_2 = 1$, így az a_n sorozat konvergens és határértéke 1.

Régebben a gyökvonás kiszámítása komoly problémának számított, amikor még nem voltak számológépek. Az előző feladat második példájával közelítő értékeket tudunk adni egy pozitív szám n-edik gyökére csupán az alapműveletek felhasználásával. Ezt a módszert a gyökvonás Newton-féle iterációs eljárásának hívjuk.

Az előzőekben bemutatott módszer hatékonyságát mutatja, hogy vannak olyan zárt képlettel megadott sorozatok, amelyeket érdemes rekurzív alakban felírni a határértékük meghatározásához. A következő állítás igazolásához követni fogjuk ezt az utat.

16. Tétel. *Legyen $|q| < 1$ és $\alpha > 0$ két valós szám. Ekkor az $a_n := n^\alpha q^n$ sorozat tart nullához.*

Bizonyítás. Az állítás nyilvánvaló, ha $q = 0$. A továbbiakban tegyük fel, hogy $q \neq 0$. Azt fogjuk igazolni, hogy a

$$b_n := n^\alpha |q|^n$$

sorozat tart nullához, amiből a tétel állítása következik.

Először legyen $\alpha = k$ egy pozitív egész szám. Az $\langle b_n \rangle$ sorozat alulról korlátos, hiszen $b_n \geq 0$ minden $n \in \mathbf{N}$ esetén. Másrészt vegyük észre, hogy

$$b_{n+1} = |q| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k b_n. \tag{6}$$

Mivel $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \to 1$ és $|q| < 1$, ezért $\exists n_0 \in \mathbf{N}$, hogy

$$1 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k < \frac{1}{|q|}$$

minden $n > n_0$ esetén. Ekkor (6) miatt $b_{n+1} < b_n$, azaz a sorozat szigorúan monoton csökkenő véges sok elem kivételével, de mivel alulról korlátos is, így konvergens.
Jelölje a a b_n sorozat határértékét. Ekkor (6) miatt

$$\underbrace{a_{n+1}}_{\to a} = |q| \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^k}_{\to 1} \underbrace{a_n}_{\to a},$$

és így a határátmenet és a műveletek felcserélhetőségéről szóló 11. Tétel alapján $a = |q| a$ teljesül, amiből $a = 0$ következik.

Ha $\alpha > 0$ egy tetszőleges valós szám, akkor legyen $k \geq \alpha$ egy pozitív egész szám. Ekkor

$$0 < n^\alpha |q|^n \leq n^k |q|^n \to 0.$$

Ezért a Rendőr-elv miatt az $b_n = n^\alpha |q|^n$ sorozat nullához tart. Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

A következő tételben szereplő két fontos határérték igazolásában is ezt az utat választjuk.

17. Tétel. *A következő két sorozat tart nullához:*

a) $a_n := \dfrac{q^n}{n!} \quad (q \in \mathbf{R}),$ *b)* $a_n := \dfrac{n!}{n^n}.$

Bizonyítás.

a) Az állítás nyilvánvaló, ha $q = 0$. Tegyük fel, hogy $q > 0$. Ekkor az $\langle a_n \rangle$ sorozat alulról korlátos, hiszen $a_n > 0$ minden $n \in \mathbf{N}$ esetén. Másrészt vegyük észre, hogy
$$a_{n+1} = \frac{q}{n+1} a_n. \tag{7}$$
Mivel $\frac{q}{n+1} \to 0$, ezért $\exists n_0 \in \mathbf{N}$, hogy $\frac{q}{n+1} < 1$ minden $n > n_0$ esetén. Ekkor (7) miatt $a_{n+1} < a_n$, azaz a sorozat szigorúan monoton csökkenő véges sok elem kivételével. Ezért a sorozat konvergens.
Jelölje a az a_n sorozat határértékét. Ekkor (7) miatt
$$\underbrace{a_{n+1}}_{\to a} = \underbrace{\frac{q}{n+1}}_{\to 0} \underbrace{a_n}_{\to a},$$
amiből $a = 0 \cdot a = 0$ következik.

Ha $q < 0$, akkor az előző eset miatt a sorozat abszolút értéke
$$|a_n| = \frac{|q|^n}{n!}$$
tart nullához. Ezért az $\langle a_n \rangle$ sorozat is tart nullához.

b) A sorozat alulról korlátos, hiszen nyilvánvalóan $a_n > 0$ minden $n \in \mathbf{N}$ esetén. Másrészt vegyük észre, hogy
$$a_{n+1} = \frac{a_n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}. \tag{8}$$
Mivel $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e$, ezért $\exists n_0 \in \mathbf{N}$, hogy
$$\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} < 1$$
minden $n > n_0$ esetén. Ekkor (8) miatt $a_{n+1} < a_n$, azaz a sorozat szigorúan monoton csökkenő véges sok elem kivételével. Ezért a sorozat konvergens.
Jelölje a az a_n sorozat határértékét. Ekkor (8) miatt
$$\underbrace{a_{n+1}}_{\to a} = \frac{\overbrace{a_n}^{\to a}}{\underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}_{\to e}},$$
amiből $a = \dfrac{a}{e}$, azaz $a = 0$ következik.

Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

8. További határértékek

Az előző részekben bemutattuk a határátmenet és a műveletek felcserélhetőségén alapuló legismertebb fogásokat. Vannak azonban olyan feladatok, ahol ezek a fogások már nem alkalmazhatók. Találkozhatunk olyan esetekkel, ahol ismerjük a képletben szereplő összes sorozat határértékét, mégsem tudunk semmit mondani az egész sorozat határértékéről. Ekkor azt mondjuk, hogy egy **kritikus határértékkel** állunk szemben.

Az előző jelenségnek az az oka, hogy a 11. és a 12. Tétel nem fedi le az összes lehetséges esetet. Ez nem véletlenül van így. A 11. Tétel például semmit sem állít arról, hogy mi történik, amikor egy hányadossorozat nevezője tart nullához. Nem is mondhat semmit általánosan, hiszen bármi lehet az eredmény, beleértve azt is, hogy a sorozat még tágabb értelemben sem lesz konvergens. Nem nehéz erre különböző példákat készíteni. Például

- ha $a_n := \dfrac{1}{n}$ és $b_n := \dfrac{1}{n}$, akkor $\dfrac{a_n}{b_n} = 1$.
- ha $a_n := \dfrac{1}{n^2}$ és $b_n := \dfrac{1}{n}$, akkor $\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{1}{n} \to 0$.
- ha $a_n := \dfrac{1}{n}$ és $b_n := \dfrac{1}{n^2}$, akkor $\dfrac{a_n}{b_n} = n \to \infty$.
- ha $a_n := \dfrac{(-1)^n}{n}$ és $b_n := \dfrac{1}{n}$, akkor $\dfrac{a_n}{b_n} = (-1)^n$, ami divergens.

Az előbbi példákban az $\langle a_n \rangle$ és $\langle b_n \rangle$ sorozat nullához tartott, a hányadosuk viselkedése mégis sokféle lehetett. Ekkor $\frac{0}{0}$ típusú kritikus határértékről beszélünk.

Más a helyzet, ha a számlálósorozat konvergens, de nem tart nullához, és a nevezősorozat nullához tart. Ilyenkor a hányadossorozat nem lehet konvergens. Ennek igazolásához először bebizonyítjuk a következő állítást.

18. Tétel. *$b_n \to 0$ akkor és csak akkor, ha $\left|\frac{1}{b_n}\right| \to \infty$.*

Bizonyítás. Legyen $k > 0$ tetszőleges és $\varepsilon := \frac{1}{k}$. Ekkor

$$b_n \to 0 \quad\Longrightarrow\quad \exists n_0 \in \mathbf{N},\ \text{hogy } |b_n - 0| < \varepsilon = \frac{1}{k}, \quad \text{ha } n > n_0,$$

azaz

$$\left|\frac{1}{b_n}\right| > k,$$

ha $n > n_0$. Így a végtelen, mint határérték definíciója értelmében $\left|\frac{1}{b_n}\right| \to \infty$.

Fordítva, legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges és $k := \frac{1}{\varepsilon}$. Ekkor

$$\left|\frac{1}{b_n}\right| \to \infty \quad \Longrightarrow \quad \exists n_0 \in \mathbf{N}, \text{ hogy } \left|\frac{1}{b_n}\right| > k = \frac{1}{\varepsilon}, \quad \text{ha } n > n_0.$$

Ekkor $|b_n - 0| < \varepsilon$, ha $n > n_0$. Így a határérték definíciója értelmében $b_n \to 0$. Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

Az előző tétel szerint egy nullsorozat reciprok sorozata tarthat végtelenhez, mínusz végtelenhez, de előfordul, hogy egyikhez sem. Ez a helyzet az

$$a_n := \frac{1}{n}, \qquad a_n := -\frac{1}{n}, \qquad a_n := \frac{(-1)^n}{n}$$

sorozatokkal. Az eredmény függ a nullsorozat elemeinek előjelétől. Mindenesetre egy nullsorozat reciprok sorozata nem lehet konvergens.

A folytatáshoz szükségünk van a következő eredményre.

19. Tétel. *Legyen a egy valós szám. Ha $a_n \to a$, akkor $|a_n| \to |a|$.*

Bizonyítás. Először igazolni fogjuk, hogy minden $a, b \in \mathbf{R}$ esetén

$$||a| - |b|| \le |a - b|. \tag{9}$$

Ez azért igaz, mert az abszolút érték tulajdonságai miatt

$$|a| = |(a - b) + b| \le |a - b| + |b| \quad \Longrightarrow \quad |a| - |b| \le |a - b|.$$

Ebből az a és b szerep felcserélésével azt kapjuk, hogy

$$|b| - |a| \le |b - a| = |a - b|,$$

amiből

$$-|a - b| \le |a| - |b| \le |a - b|$$

következik. Ez utóbbi pontosan a (9) egyenlőtlenséget jelenti.

A tétel állítása azonnal következik a határérték definíciójából és a (9) egyenlőtlenségből, hiszen ha $|a_n - a| < \varepsilon$, akkor

$$||a_n| - |a|| \le |a_n - a| < \varepsilon.$$

Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

Most már biztosan állíthatjuk, hogy ha $a_n \to a \ne 0$ és $b_n \to 0$, akkor az $\left\langle \frac{a_n}{b_n} \right\rangle$ sorozat divergens, hiszen az előző két tétel miatt $\left|\frac{1}{b_n}\right| \to \infty$, $|a_n| \to |a| \ne 0$ és így a 12. Tételből következik, hogy

$$\left|\frac{a_n}{b_n}\right| = \left|\frac{1}{b_n}\right| \cdot |a_n| \to \infty \cdot |a| = \infty.$$

Ezért a fenti esetet nem fogjuk a kritikus határértékek közé sorolni.

A 12. Tétel szintén több olyan esetet hagy nyitva, amikből kritikus határértékeket kapunk. Ezek közül kiemelném a következőket:

- a $\infty \cdot 0$ típusú határértékek, azaz $a_n b_n$, ahol $a_n \to \infty$ és $b_n \to 0$.
- a $\infty - \infty$ típusú határértékek, azaz $a_n - b_n$, ahol $a_n \to \infty$ és $b_n \to \infty$.
- a $\dfrac{\infty}{\infty}$ típusú határértékek, azaz $\dfrac{a_n}{b_n}$, ahol $a_n \to \infty$ és $b_n \to \infty$.

Az ilyen sorozatok esetén a határértéket nem lehet az $\langle a_n \rangle$ és $\langle b_n \rangle$ sorozatoktól függetlenül meghatározni, ahogy ezt a 13., a 14. és a 15. Feladatok mutatják. Ezért ezek kritikus határértékek.

A 11. Tételből tudjuk, hogy ha az $\langle a_n \rangle$ sorozat konvergens és $b_n \to 0$, akkor $a_n b_n \to 0$. Ez az állítás a következő módon általánosítható.

20. Tétel. *Ha az $\langle a_n \rangle$ sorozat korlátos és $b_n \to 0$, akkor $a_n b_n \to 0$.*

Bizonyítás. Ha az $\langle a_n \rangle$ sorozat korlátos, akkor $\exists k > 0$, hogy $|a_n| < k$ minden $n \in \mathbf{N}$ esetén. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ekkor

$$b_n \to 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \exists n_0 \in \mathbf{N},\ \text{hogy}\ |b_n - 0| < \frac{\varepsilon}{k},\ \text{ha}\ n > n_0.$$

Ezért

$$|a_n b_n - 0| = |a_n||b_n| < k\frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon,$$

ami a határérték definíciója szerint azt jelenti, hogy $a_n b_n \to 0$. Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

Az előző eredménnyel néha olyan feladatokat tudunk megoldani, amelyeknek képlete bonyolultnak tűnő részeket tartalmaznak, de ezek korlátossága miatt a feladat elég egyszerű módon oldható meg. Például, számítsuk ki az

$$a_n := \frac{\sin n!}{n}$$

sorozat határértékét! Első olvasásra nem tudnánk mit kezdeni a $\sin n!$ résszel, azonban tudjuk, hogy a szinusz függvény csak -1 és 1 közötti értékeket vehet fel, azaz mindegy, mi szerepel az argumentumában, korlátos marad. Mivel $\frac{1}{n} \to 0$, így sorozatunk nullához tart.

7. Feladat. *Adjuk meg a következő sorozatok határértékét!*

a) $a_n := \dfrac{(-1)^n}{n^2}$, *b)* $a_n := \dfrac{\operatorname{arctg}(1+n^n)}{2^n}$.

Megoldás:

(a) A $\langle(-1)^n\rangle$ sorozat korlátos, $\dfrac{1}{n^2} \to 0$, ezért $a_n \to 0$.

(b) Az árkusztangens függvény korlátos, mindegy mi szerepel az argumentumában. Mivel $\left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$, ezért $a_n \to 0$.

Van egy másik ok, ami miatt néhány feladatban nem alkalmazhatjuk a határátmenet és a műveletek felcserélhetőségét. Szeretném ezt egy tanulságos példával bemutatni. Számítsuk ki az

$$a_n := \frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$$

sorozat határértéket! Úgy gondolkodhatunk, hogy a sorozat felírható az

$$a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}$$

módon, és mivel minden tag nullsorozat, illetve a sorozatunk ezek összegéből áll, akkor a keresett határérték nulla. Sajnos gondolatmenetünk **hibás**! A gondot az okozza, hogy a fenti tagok száma nem fix, hiszen n-től függ, így a 11. Tétel nem alkalmazható. A helyes út az, hogy meg kell szabadulni a változó elemszámú összegtől azzal, hogy megpróbáljuk a képletet zárt alakban felírni, ha ez lehetséges. Ezt a jelenlegi esetben meg tudjuk tenni, hiszen

$$1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2},$$

és így a helyes megoldás

$$a_n = \frac{1+2+\cdots+n}{n^2} = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) \to \frac{1}{2}.$$

8. Feladat. *Adjuk meg a következő sorozatok határértékét!*

$$a)\quad a_n := \frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}, \qquad b)\quad a_n := \frac{1+2+\cdots+2^{n-1}}{2^n}.$$

Megoldás:

(a) Az

$$1^2+2^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

összefüggés alkalmazásával

$$a_n = \frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) \to \frac{1}{3}.$$

(b) Alkalmazzuk az ismert

$$1 + q + \cdots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}, \qquad (q \neq 1)$$

átalakítást $q = 2$ esetén! Ekkor

$$a_n = \frac{1 + 2 + \cdots + 2^{n-1}}{2^n} = \frac{2^n - 1}{2^n} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \to 1.$$

A következő tétel állítását sem tudjuk a határátmenet és a műveletek felcserélhetőséggel igazolni.

21. Tétel. *Legyen $\langle a_n \rangle$ egy számsorozat és*

$$A_n := \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

a sorozat elemeiből képzett számtani közepekből álló sorozat. Ekkor

(a) ha $\langle a_n \rangle$ konvergens, akkor $\langle A_n \rangle$ is konvergens és ugyanoda tart,

(b) ha $\langle a_n \rangle$ végtelenhez (mínusz végtelenhez) tart, akkor $\langle A_n \rangle$ is végtelenhez (mínusz végtelenhez) tart.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az $\langle a_n \rangle$ sorozat konvergens és határértéke a. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. A határérték fogalma szerint

$$a_n \to a \quad \Longrightarrow \quad \exists n_1 \in \mathbf{N}, \text{ hogy } |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ ha } n > n_1.$$

Az $\langle a_n \rangle$ sorozat korlátos, mert konvergens, ezért az $\langle a_n - a \rangle$ sorozat is korlátos, azaz $\exists k > 0$, hogy $|a_n - a| < k$ minden $n \in \mathbf{N}$ esetén. Továbbá

$$\frac{1}{n} \to 0 \quad \Longrightarrow \quad \exists n_2 \in \mathbf{N}, \text{ hogy } \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \frac{\varepsilon}{2n_1 k}, \text{ ha } n > n_2,$$

azaz

$$\frac{1}{n} n_1 k < \frac{\varepsilon}{2},$$

ha $n > n_2$. Legyen $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$. Ha $n > n_0$, akkor

$$|A_n - a| = \left|\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - a\right| = \frac{1}{n}\left|\sum_{i=1}^{n}(a_i - a)\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n_1}|a_i - a| + \frac{1}{n}\sum_{i=n_1+1}^{n}|a_i - a| = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n_1} k + \frac{1}{n}\sum_{i=n_1+1}^{n}\frac{\varepsilon}{2} =$$

$$= \frac{1}{n} n_1 k + \frac{1}{n}(n - n_1)\frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ez azt jelenti, hogy $A_n \to a$.

Másrészt tegyük fel, hogy $a_n \to \infty$. Ekkor a sorozat véges sok elemétől eltekintve nagyobb, mint 0. Ezért nem jelent nagyobb megszorítást, ha azt feltételezzük, hogy az $\langle a_n \rangle$ sorozat minden eleme nagyobb, mint 0. Legyen k egy tetszőleges valós szám. A végtelen, mint határérték fogalma szerint

$$a_n \to \infty \quad \Longrightarrow \quad \exists n_1 \in \mathbf{N}, \text{ hogy } |a_n| > 2k, \text{ ha } n > n_1.$$

Továbbá

$$\frac{1}{n} \to 0 \quad \Longrightarrow \quad \exists n_2 \in \mathbf{N}, \text{ hogy } \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \frac{1}{2n_1}, \text{ ha } n > n_2,$$

azaz

$$\frac{2n_1}{n} < 1,$$

ha $n > n_2$. Legyen $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$. Ekkor, ha $n > n_0$

$$A_n = \underbrace{\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_1}}{n}}_{>0} + \frac{a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \cdots + a_n}{n} >$$

$$> \frac{a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \cdots + a_n}{n} > \frac{2k(n - n_1)}{n} = 2k - \frac{2kn_1}{n} > 2k - k = k.$$

Ez azt jelenti, hogy $A_n \to \infty$.

Végül, ha $a_n \to -\infty$, akkor alkalmazzuk az előző esetet a $\langle -a_n \rangle$ sorozattal, amiből azt kapjuk, hogy $-A_n \to \infty$, azaz $A_n \to -\infty$. Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

Az előző állításból rögtön következik, hogy

$$\frac{1 + 2 + \cdots + n}{n} \to \infty,$$

hiszen a fenti sorozatot az $a_n := n \to \infty$ sorozat számtani közepeiből kapjuk. Hasonlóan,

$$\frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n}}{n} \to 0,$$

hiszen a fenti sorozatot az $a_n := \dfrac{1}{2^n} \to 0$ sorozat számtani közepeiből kapjuk.

Pozitív elemű sorozatok esetén a számtani közepekre vonatkozó állítás kiterjeszthető a mértani és a harmonikus közepekre is. Nevezetesen, ha $\langle a_n \rangle$ egy pozitív elemekből álló, konvergens, vagy végtelenhez tartó számsorozat és

$$H_n := \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}, \qquad G_n := \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

a sorozat elemeiből képzett harmonikus és mértani közepekből álló sorozatok, akkor a $\langle H_n \rangle$ és $\langle G_n \rangle$ sorozatok konvergensek akár tágabb értelemben, és ugyanoda tartanak, ahova az $\langle a_n \rangle$ sorozat is tart.

A harmonikus középre vonatkozó állítás igazolásához vegyük észre, hogy $\langle H_n \rangle$ nem más, mint az $\langle a_n \rangle$ reciprok sorozatából képzet számtani közepekből álló sorozatának reciproka, azaz

$$H_n = \frac{1}{\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\dots+\frac{1}{a_n}}{n}}.$$

Három esetet különböztetünk meg:

- ha az $\langle a_n \rangle$ sorozat tart egy pozitív a számhoz, akkor az $\langle \frac{1}{a_n} \rangle$ reciprok sorozata tart az $\frac{1}{a}$ számhoz. Ezért, a 21. Tétel szerint a reciprok sorozat számtani közepeiből álló sorozata szintén tart az $\frac{1}{a}$ számhoz. Mivel $\langle H_n \rangle$ ez utóbbi sorozat reciproka, így H_n tart az $\frac{1}{a}$ szám reciprokához, azaz $H_n \to a$.

- ha az $\langle a_n \rangle$ sorozat tart végtelenhez, akkor az $\langle \frac{1}{a_n} \rangle$ reciprok sorozata tart nullához (lásd a 18. Tételt). Ezért, a 21. Tétel szerint a reciprok sorozat számtani közepeiből álló sorozata szintén tart nullához. Mivel $\langle H_n \rangle$ ez utóbbi sorozat reciproka és pozitív, így H_n tart végtelenhez, azaz $H_n \to \infty$.

- ha az $\langle a_n \rangle$ sorozat tart nullához, akkor az $\langle \frac{1}{a_n} \rangle$ reciprok sorozata tart végtelenhez, hiszen a sorozat pozitív elemekből áll (lásd a 18. Tételt). Ezért, a 21. Tétel szerint a reciprok sorozat számtani közepeiből álló sorozata szintén tart végtelenhez. Mivel $\langle H_n \rangle$ ez utóbbi sorozat reciproka, így H_n tart nullához, azaz $H_n \to 0$.

Szeretném megjegyezni, hogy az utolsó eset másképpen is igazolható. Ha $a_n \to 0$, akkor a 21. Tétel szerint $A_n \to 0$, és így a számtani és a harmonikus közepek közötti egyenlőtlenségből

$$0 < H_n \leq A_n \to 0$$

a Rendőr-elv alkalmazásával azt kapjuk, hogy $H_n \to 0$.

A G_n mértani közepekből képzet sorozatra vonatkozó eredmény igazolásához elegendő a Rendőr-elvet alkalmazni az

$$a \leftarrow H_n \leq G_n \leq A_n \to a$$

számtani, mértani és a harmonikus közepek közötti egyenlőtlenségben. Ebben az a lehet nulla, pozitív valós szám vagy végtelen. Mindhárom esetben $G_n \to a$ teljesül.

Rögtön egy fontos nevezetes eredményhez jutunk, ha veszünk az

$$a_n := n$$

sorozatot. Mivel $a_n \to \infty$, így szintén

$$G_n = \sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \to \infty.$$

Ezzel azt igazoltuk, hogy $\sqrt[n]{n!} \to \infty$.

A mértani közepekre vonatkozó eredmény alapján könnyen igazolható a következő állítást.

22. Tétel. *Legyen $\langle a_n \rangle$ egy pozitív elemekből álló számsorozat, valamint*

$$b_n := \frac{a_{n+1}}{a_n} \qquad \text{és} \qquad c_n := \sqrt[n]{a_n}$$

minden $n \in \mathbf{N}$ esetén. Ekkor ha a $\langle b_n \rangle$ sorozat konvergens, akkor a $\langle c_n \rangle$ is konvergens, és

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Másrészt, ha $\langle b_n \rangle$ végtelenhez tart, akkor $\langle c_n \rangle$ is végtelenhez tart.

Bizonyítás. Jelölje $a_0 := 1$ és legyen

$$b'_n := \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

minden $n \in \mathbf{N}$ esetén. Mivel $b'_n = b_{n-1}$ minden $n > 1$ esetén, ezért a $\langle b'_n \rangle$ és a $\langle b_n \rangle$ sorozat határértéke megegyezik akár tágabb értelemben is. Másrészt, a

$$c_n = \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{a_0 \cdot \frac{a_1}{a_0} \cdot \frac{a_2}{a_1} \dots \frac{a_n}{a_{n-1}}} = \sqrt[n]{b'_1 b'_2 \dots b'_n}$$

átalakításból, a mértani közepekből álló sorozat konvergenciájáról elmondottak alapján következik, hogy a $\langle c_n \rangle$ sorozat határértéke megegyezik a $\langle b'_n \rangle$ sorozat határértékével akár tágabb értelemben is. Ezzel a tétel állítását igazoltuk. $\square$

Az előző tételben szereplő módszerrel könnyen igazolni tudjuk a már jól ismert nevezetes eredményt, miszerint $\sqrt[n]{n} \to 1$. Valóban, ha $a_n := n$, akkor

$$b_n := \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \to 1.$$

Ezért $\sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{a_n} \to 1$.

A 9. Tétel szintén könnyen igazolható az előző módszerrel. Azt kell igazolni, hogy ha $a_n \to a > 0$, akkor $\sqrt[n]{a_n} \to 1$. Ez azért igaz, mert ha $a > 0$, akkor

$$b_n := \frac{a_{n+1}}{a_n} \to \frac{a}{a} = 1.$$

Ezért $\sqrt[n]{a_n} \to 1$.

Egy másik példával is bemutatjuk a 22. Tétel gyakorlati alkalmazását. Számítsuk ki a

$$c_n := \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$$

sorozat határértéket! Legyen $a_n := c_n^n = \frac{n^n}{n!}$. Mivel

$$b_n := \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \frac{n!(n+1)(n+1)^n}{(n+1)!n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e,$$

így

$$c_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \sqrt[n]{a_n} \to e.$$

9. Az alsó és a felső határértékek és a műveletek

A „Számsorozatok és tulajdonságaik” című tananyagban bevezettük a sorozatok torlódási pontjának fogalmát mint a határérték fogalmának „gyengítését”. Valóban, a határérték megköveteli, hogy minden környezetéből legfeljebb véges sok sorozatbeli elem maradjon ki, de a torlódási ponthoz elegendő, hogy minden környezete végtelen sok sorozatbeli elemet tartalmazzon, amiből végtelen sok sorozatbeli elem is kimaradhat. Kiderült, hogy egy sorozat torlódási pontjai a sorozat összes konvergens részsorozatának határértéke.

A határértéket tágabb értelemben is értelmeztük, amikor megengedtük, hogy a ∞ és a $-\infty$ határértékek lehessenek. Hasonlóan, a torlódási pont fogalmát is kiterjesztettük azzal, hogy felülről nem korlátos sorozatok esetén a végtelent, alulról nem korlátos sorozatok esetén a mínusz végtelent kiterjesztett torlódási pontnak tekinthessük.

Nem nehéz igazolni, hogy ha egy sorozat elemeihez hozzáadunk egy c konstans számot, akkor az új sorozat összes torlódási pontját megkapjuk az eredeti sorozat torlódási pontjaiból úgy, hogy mindegyikhez hozzáadjuk a c számot. Ekkor a ∞ és a $-\infty$ kiterjesztett torlódási pontok maradnak, ha azok voltak az eredeti sorozatnak. Ennek az az oka, hogy az új sorozat összes részsorozatát az eredeti sorozat részsorozataiból kapjuk meg a c szám hozzáadásával.

Hasonló a helyzet, ha egy sorozat elemeit megszorozzuk egy $c \neq 0$ konstans számmal, hiszen az új sorozat összes részsorozatát az eredeti sorozat részsorozataiból kapjuk meg a c számmal való szorzással. Természetesen negatív számmal való szorzás esetén a végtelenből mint kiterjesztett torlódási pontból lesz mínusz végtelen, és fordítva, ahogyan a valós számok kiterjesztett rendszerében értelmeztük. A $c = 0$ esetet külön kell kezelni, mert ekkor az új sorozat csupa nulla elemekből áll az eredet sorozattól függetlenül.

A fentiek alapján felmerül a kérdés, hogy a torlódási pontok esetén nem tudnánk-e egy, a határátmenet és a műveletek felcserélhetőségéhez hasonló állítás kimondani. Hamar rájövünk, hogy ilyen formában nem, azaz két sorozat összegének torlódási pontjait nem kapjuk meg a két sorozat torlódási pontjainak összegéből. Ehhez elegendő venni az

$$a_n := (-1)^n \qquad \text{és} \qquad b_n := -(-1)^n$$

sorozatokat, amelyeknek összege a csupa nulla elemekből álló sorozat. Ez utóbbinak 0 az egyetlen torlódási pontja, de 1 torlódási pontja az $\langle a_n \rangle$ és a $\langle b_n \rangle$ sorozatnak is. Ugyanígy a két sorozat szorzata a -1 értéket felvevő konstans sorozat, amelynek -1 az egyetlen torlódási pontja. Más a helyet, ha azt tudjuk, hogy legalább az egyik sorozat konvergens.

23. Tétel. *Legyen $\langle a_n \rangle$ egy konvergens sorozat, és $\langle b_n \rangle$ egy tetszőleges sorozat. Ekkor az $\langle a_n + b_n \rangle$ sorozat összes torlódási pontja az $\langle a_n \rangle$ sorozat határértéke és a $\langle b_n \rangle$ sorozat torlódási pontjai összegéből áll össze.*

Bizonyítás. Jelölje a az $\langle a_n \rangle$ sorozat határértékét.

Ha b a $\langle b_n \rangle$ sorozat torlódási pontja, akkor van olyan $b_n^{(1)} := b_{\varphi(n)}$ részsorozata, amely b-hez tart. Ha ugyanazzal a φ leképezéssel képezzük az $a_n^{(1)} := a_{\varphi(n)}$ részsorozatot, akkor egyrészt $c_n := a_n^{(1)} + b_n^{(1)}$ részsorozata lesz az $\langle a_n + b_n \rangle$ sorozatnak, másrészt $a_n^{(1)} \to a$, hiszen minden konvergens sorozat részsorozata ugyanoda tart. Így a 11. Tétel szerint

$$c_n = a_n^{(1)} + b_n^{(1)} \to a + b,$$

ami azt jelenti, hogy $a + b$ torlódási pontja az $\langle a_n + b_n \rangle$ sorozatnak.

Fordítva, tegyük fel, hogy c torlódási pontja az $\langle a_n + b_n \rangle$ sorozatnak. Ekkor van olyan $c_n := a_{\varphi(n)} + b_{\varphi(n)}$ részsorozata, amely c-hez tart. Legyen $b := c - a$. Mivel $a_n^{(1)} := a_{\varphi(n)}$ részsorozata a konvergens $\langle a_n \rangle$ sorozatnak, így $a_n^{(1)} \to a$. Másrészt $b_n^{(1)} := b_{\varphi(n)}$ részsorozata a $\langle b_n \rangle$ sorozatnak, és

$$b_n^{(1)} = c_n - a_n^{(1)}.$$

Így a 11. Tétel szerint a $b_n^{(1)}$ sorozat konvergens is $c - a$-hoz, azaz b-hez tart. Ebből következik, hogy b a $\langle b_n \rangle$ sorozat torlódási pontja. Tehát c előáll az $\langle a_n \rangle$ sorozat határértékének és a $\langle b_n \rangle$ sorozat egyik torlódási pontjának összegeként.

Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

Az előző tétel nagy mértékben általánosítható abban az esetben, ha az $\langle a_n \rangle$ végtelenhez vagy mínusz végtelenhez tart, vagy a $\langle b_n \rangle$ sorozat kiterjesztett torlódási pontjait vesszük figyelembe. Ekkor az összeadást a valós számok kiterjesztett rendszerében kell érteni. Valóban, ha $\langle a_n \rangle$ egy konvergens sorozat és végtelen (mínusz végtelen) kiterjesztett torlódási pontja a $\langle b_n \rangle$ sorozatnak, akkor végtelen (mínusz végtelen) is kiterjesztett torlódási pontja lesz az $\langle a_n + b_n \rangle$ sorozatnak. Ha pedig az $\langle a_n \rangle$ sorozat tart végtelenhez (mínusz végtelenhez) és a $\langle a_n \rangle$ sorozat alulról (felülről) korlátos, akkor az $\langle a_n + b_n \rangle$ sorozatnak egyetlen torlódási pontja sem lesz, de egy kiterjesztett torlódási pontja lesz, a végtelen (mínusz végtelen).

Akkor van gond, amikor az $\langle a_n + b_n \rangle$ sorozat tart végtelenhez és a $\langle b_n \rangle$ sorozat nem korlátos alulról. Például, az

$$a_n := (-1)^n + n \qquad \text{és} \qquad b_n := -n$$

sorozatok esetében $a_n \to \infty$ és $b_n \to -\infty$, de az $\langle a_n + b_n \rangle$ sorozatnak két torlódási pontja van: az 1 és a -1. Hasonló gond lehet, ha az $\langle a_n + b_n \rangle$ sorozat tart mínusz végtelenhez és a $\langle b_n \rangle$ sorozat nem korlátos felülről. A magyarázathoz tartozik, hogy a $\infty - \infty$ kivonást nem értelmezzük a valós számok kiterjesztett rendszerében.

Egy nagyon hasonló állítás tudunk kimondani sorozatok szorzata esetén.

24. Tétel. *Legyen $\langle a_n \rangle$ egy nem nullához tartó konvergens sorozat, és $\langle b_n \rangle$ egy tetszőleges sorozat. Ekkor az $\langle a_n b_n \rangle$ sorozat összes torlódási pontja az $\langle a_n \rangle$ sorozat határértéke és a $\langle b_n \rangle$ sorozat torlódási pontjai szorzatából áll össze.*

Bizonyítás. A bizonyításban hasonlóan járunk el, mint a 23. Tétel bizonyításában tettük. Jelölje a az $\langle a_n \rangle$ sorozat határértékét. Mivel $a \neq 0$, így $a_n \neq 0$ véges sok elemtől eltekintve. Véges sok elem pedig nem befolyásolja a torlódási pontok létezését vagy értékét. Ezért nem jelent megszorítást, ha feltételezzük, hogy az $\langle a_n \rangle$ sorozat egyik eleme sem nulla.

Ha b a $\langle b_n \rangle$ sorozat torlódási pontja, akkor van olyan $b_n^{(1)} := b_{\varphi(n)}$ részsorozata, amely b-hez tart. Ha ugyanazzal a φ leképezéssel képezzük az $a_n^{(1)} := a_{\varphi(n)}$ részsorozatot, akkor egyrészt $c_n := a_n^{(1)} b_n^{(1)}$ részsorozata lesz az $\langle a_n b_n \rangle$ sorozatnak, másrészt $a_n^{(1)} \to a$, hiszen minden konvergens sorozat részsorozata ugyanoda tart. Így a 11. Tétel szerint

$$c_n = a_n^{(1)} b_n^{(1)} \to ab,$$

ami azt jelenti, hogy ab torlódási pontja az $\langle a_n b_n \rangle$ sorozatnak.

Fordítva, tegyük fel, hogy c torlódási pontja az $\langle a_n b_n \rangle$ sorozatnak. Ekkor van olyan $c_n := a_{\varphi(n)} b_{\varphi(n)}$ részsorozata, amely c-hez tart. Legyen $b := \frac{c}{a}$. Mivel $a_n^{(1)} := a_{\varphi(n)}$ részsorozata a konvergens $\langle a_n \rangle$ sorozatnak, így $a_n^{(1)} \to a$. Másrészt $b_n^{(1)} := b_{\varphi(n)}$ részsorozata a $\langle b_n \rangle$ sorozatnak, és

$$b_n^{(1)} = \frac{c_n}{a_n^{(1)}}$$

Így a 11. Tétel szerint a $b_n^{(1)}$ sorozat konvergens is $\frac{c}{a}$-hoz, azaz b-hez tart. Ebből következik, hogy b a $\langle b_n \rangle$ sorozat torlódási pontja. Tehát c előáll az $\langle a_n \rangle$ sorozat határértékének és a $\langle b_n \rangle$ sorozat egyik torlódási pontjának szorzataként.

Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

Az előző tételből kimarad az az eset, amikor a konvergens sorozat nullához tart. Ez nem véletlen, hiszen például az

$$a_n := \frac{1}{n} \qquad \text{és} \qquad b_n := n$$

sorozatoknál $a_n \to 0$, a $\langle b_n \rangle$ sorozatnak nincsenek torlódási pontjai, mégis a szorzatuk az 1 értéket felvevő konstans sorozat, amelynek van torlódási pontja. Ennek oka az, hogy a $\langle b_n \rangle$ sorozat nem korlátos, hiszen egy korlátos sorozatnak mindig van torlódási pontja, illetve a 20. Tétel értelmében $a_n b_n \to 0$, tehát 0 az $\langle a_n b_n \rangle$ sorozat egyetlen torlódási pontja. Ezért a 24. Tétel is érvényes nullához tartó $\langle a_n \rangle$ sorozatokra a $\langle b_n \rangle$ sorozat korlátossága mellett.

A 23. Tételhez hasonlóan megnézhetjük mi történik a $\langle b_n \rangle$ sorozat kiterjesztett torlódási pontjaival. Nem nehéz igazolni, hogy ebben az esetben is a valós számok kiterjesztett rendszerében értelmezett szorzást kell figyelembe venni. Tehát ha az $\langle a_n \rangle$ sorozat határértéke pozitív és végtelen vagy mínusz végtelen a $\langle b_n \rangle$ sorozat kiterjesztett torlódási pontja, akkor ez továbbra is az $\langle a_n b_n \rangle$ sorozat kiterjesztett torlódási pontja lesz. Ha azonban az $\langle a_n \rangle$ sorozat határértéke negatív és végtelen kiterjesztett torlódási pontja a $\langle b_n \rangle$ sorozatnak, akkor a mínusz végtelen torlódási pontja lesz az $\langle a_n b_n \rangle$ sorozatnak, és fordítva, mínusz végtelenből végtelent kapunk.

Ha pedig az $\langle a_n \rangle$ sorozat tart végtelenhez vagy mínusz végtelenhez, akkor a valós számok kiterjesztett rendszerében értelmezett szorzás alapján majdnem mindig meg tudjuk határozni a végeredményt. Kivéve, ha a 0 torlódási pontja a $\langle b_n \rangle$ sorozatnak. Például, az

$$a_n := n^2 \qquad \text{és} \qquad b_n := \frac{1}{n}$$

sorozatok esetében $a_n b_n = n$, amelynek nincsenek torlódási pontjai, és egy kiterjesztett torlódási pontja van, a végtelen. Ha azonban az

$$a_n := n \qquad \text{és} \qquad b_n := \frac{(-1)^n}{n}$$

sorozatokat vesszük, akkor $a_n b_n = (-1)^n$, amelynek két torlódási pontja van, az 1 és a -1, de nincsenek kiterjesztett torlódási pontjai. A magyarázathoz tartozik, hogy a $\infty \cdot 0$ szorzatot nem értelmezzük a valós számok kiterjesztett rendszerében.

9. Feladat. *Határozzuk meg a következő sorozatok torlódási és kiterjesztett torlódási pontjait!*

a) $a_n := \dfrac{n(1+(-1)^n)}{n+1}$, *b)* $a_n := \left(\dfrac{1+2^n}{3^n} + (-2)^n\right) n$,

c) $a_n := \dfrac{2n+3}{n-1} \cdot \sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$, *d)* $a_n := \left(\cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right) + (-1)^n\right) \cdot \dfrac{1}{2^n}$.

Megoldás: A megadott sorozatokat felbontjuk olyan sorozatok összegére és szorzatára, amelyeknek könnyebb megállapítani a határértékeit, illetve torlódási pontjait, és alkalmazzuk a 23. és a 24. Tételeket.

(a) $\boxed{a_n := \dfrac{n(1+(-1)^n)}{n+1}}$

Legyen

$$a_n^{(1)} := 1, \qquad a_n^{(2)} := (-1)^n \qquad \text{és} \qquad a_n^{(3)} := \frac{n}{n+1}.$$

Mivel $a_n^{(1)} \to 1$ és $\langle a_n^{(2)} \rangle$ torlódási pontjai 1 és -1, így $\langle a_n^{(1)} + a_n^{(2)} \rangle$ torlódási pontjai 2 és 0. Másrészt $a_n^{(3)} \to 1$. Ezért az $a_n = (a_n^{(1)} + a_n^{(2)}) a_n^{(3)}$ sorozat torlódási pontjai szintén 2 és 0.

(b) $\boxed{a_n := \left(\frac{1+2^n}{3^n} + (-2)^n\right) n}$

Legyen

$$a_n^{(1)} := \frac{1+2^n}{3^n}, \qquad a_n^{(2)} := (-2)^n \qquad \text{és} \qquad a_n^{(3)} := n.$$

Mivel $a_n^{(1)} \to 0$ és $\langle a_n^{(2)} \rangle$ torlódási pontjai 2 és -2, így $\langle a_n^{(1)} + a_n^{(2)} \rangle$ torlódási pontjai szintén 2 és -2. Másrészt $a_n^{(3)} \to \infty$. Ezért az $a_n = (a_n^{(1)} + a_n^{(2)}) a_n^{(3)}$ sorozat kiterjesztett torlódási pontjai ∞ és $-\infty$.

(c) $\boxed{a_n := \frac{2n+3}{n-1} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}$ Legyen

$$a_n^{(1)} := \frac{2n+3}{n-1} \qquad \text{és} \qquad a_n^{(2)} := \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

Mivel $a_n^{(1)} \to 2$ és $\langle a_n^{(2)} \rangle$ torlódási pontjai 0, 1 és -1, így az $a_n = a_n^{(1)} a_n^{(2)}$ sorozat torlódási pontjai 0, 2 és -2.

(d) $\boxed{a_n := \left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + (-1)^n\right) \cdot \frac{1}{2^n}}$

Legyen

$$a_n^{(1)} := \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right), \qquad a_n^{(2)} := (-1)^n \qquad \text{és} \qquad a_n^{(3)} := \frac{1}{2^n}.$$

Tudjuk, hogy $\langle a_n^{(1)} \rangle$ torlódási pontjai 0, 1 és -1 és $\langle a_n^{(2)} \rangle$ torlódási pontjai 1 és -1, de hiba lenne azt gondolni, hogy ebből automatikusan következik, hogy a fenti számokból bármely kettő összege torlódási pontja lenne az $\langle a_n^{(1)} + a_n^{(2)} \rangle$ sorozatnak, mert egyik sem konvergens. Inkább vegyük észere, hogy $a_n^{(3)} \to 0$ és

$$a_n = a_n^{(1)} a_n^{(3)} + a_n^{(2)} a_n^{(3)}.$$

Mivel $\langle a_n^{(1)} \rangle$ és $\langle a_n^{(2)} \rangle$ korlátos sorozatok, így $a_n^{(1)} a_n^{(3)} \to 0$ és $a_n^{(2)} a_n^{(3)} \to 0$. Ezért $a_n \to 0$, azaz 0 az egyetlen torlódási pontja.

A torlódási és kiterjesztett torlódási pontok közül a valós számok kiterjesztett rendszerében vett legnagyobb és legkisebb fontos szerepet játszik a matematikai analízisben. Ezeket a sorozat felső és alsó határértéknek neveztük,

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \qquad \text{és} \qquad \liminf_{n\to\infty} a_n$$

módon jelöltük őket, és a „Számsorozatok és tulajdonságaik” című tananyagban egy teljes részt szenteltük a tanulmányozására.

A felső határérték a sorozat legnagyobb torlódási pontja, ha a sorozat felülről korlátos és van torlódási pontja, illetve végtelen, ha a sorozat nem korlátos felülről. Ellenkező esetben a felső határérték mínusz végtelen, ami csak akkor fordul elő, ha a sorozat felülről korlátos, alulról nem korlátos és nincsen torlódási pontja. Ez utóbbi esetben a sorozat mínusz végtelenhez tart. Az alsó határérték a sorozat legkisebb torlódási pontja, ha a sorozat alulról korlátos és van torlódási pontja, illetve mínusz végtelen, ha a sorozat nem korlátos alulról. Ellenkező esetben az alsó határérték végtelen, és ez történik, amikor a sorozat végtelenhez tart.

Az a célunk, hogy megkeressük a hátárátmenet és a műveletek felcserélhetőségről szóló tétel megfelelőjét felső és alsó határértékekre. Azonban már a negatív konstansokkal való szorzással gondban leszünk, hiszen nem tudjuk a negatív konstansokat kiemelni belőlük. Például az

$$a_n := 1 + (-1)^n$$

sorozat felső határértéke 2, de a $\langle -a_n \rangle$ sorozat felső határértéke nem -2, hanem 0. Inkább a következő összefüggések érvényesek

$$\limsup_{n\to\infty}(-a_n) = -\liminf_{n\to\infty} a_n \qquad \text{és} \qquad \liminf_{n\to\infty}(-a_n) = -\limsup_{n\to\infty} a_n, \tag{10}$$

hiszen a mínusz eggyel való szorzással a legnagyobb torlódási pontból a legkisebb torlódási pontot kapjuk a mínusz eggyel megszorzott sorozatra nézve.

Általában nem igaz, hogy az alsó és felső határértékek felcserélhetők a műveletekkel. Nem nehéz ehhez ellenpéldát találni. De az ebben a részben igazolt állítások azt sugallják, hogy ha az egyik sorozat konvergens, akkor kaphatunk pozitív eredményeket. A következő tételekben szereplő műveleteket a valós számok kiterjesztett rendszerében kell értelmezni.

25. Tétel. *Legyen $\langle a_n \rangle$ egy konvergens sorozat, és $\langle b_n \rangle$ egy tetszőleges sorozat. Ekkor*

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$$

és

$$\liminf_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n$$

Bizonyítás. Az állítás a 23. Tétel következménye, hiszen ha a $\langle b_n \rangle$ sorozat korlátos, akkor $\langle a_n + b_n \rangle$ torlódási pontjait $\langle b_n \rangle$ torlódási pontjaiból kapjuk $\langle a_n \rangle$ határértéke hozzáadásával. Ez pedig nem fogja megváltoztatni a torlódási pontok nagyságbeli sorrendjét.
Ha $\langle b_n \rangle$ felülről nem korlátos sorozat, akkor $\langle a_n + b_n \rangle$ sem korlátos felülről, így mindkét sorozat felső határértéke végtelen. Ugyanúgy, ha $\langle b_n \rangle$ alulról nem korlátos sorozat, akkor $\langle a_n + b_n \rangle$ sem korlátos alulról, így mindkét sorozat alsó határértéke mínusz végtelen.
Végül, ha $b_n \to -\infty$, akkor szintén $a_n + b_n \to -\infty$, azaz mindkét sorozat felső határértéke mínusz végtelen, illetve ha $b_n \to \infty$, akkor szintén $a_n + b_n \to \infty$, azaz mindkét sorozat alsó határértéke végtelen.

Szeretném megjegyezni, hogy ha nem tudjuk garantálni, hogy az egyik sorozat konvergens, akkor érvényesek a következő egyenlőtlenségek

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \le \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$$

és

$$\liminf_{n\to\infty}(a_n + b_n) \ge \liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n.$$

Ezek igazolását feladatként ajánljuk az olvasónak.

Végül szorzás esetén a következő eredményhez jutunk.

26. Tétel. *Legyen $\langle a_n\rangle$ egy konvergens sorozat, és $\langle b_n\rangle$ egy tetszőleges sorozat. Ekkor, ha az $\langle a_n\rangle$ sorozat határértéke pozitív, akkor*

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \limsup_{n\to\infty} b_n$$

és

$$\liminf_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \liminf_{n\to\infty} b_n.$$

Ha pedig az $\langle a_n\rangle$ sorozat határértéke negatív akkor

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \liminf_{n\to\infty} b_n$$

és

$$\liminf_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \limsup_{n\to\infty} b_n$$

Bizonyítás. Az állítás a 24. Tétel következménye. Legyen az $\langle a_n\rangle$ sorozat határértéke pozitív. Ha a $\langle b_n\rangle$ sorozat korlátos, akkor $\langle a_n b_n\rangle$ torlódási pontjait $\langle b_n\rangle$ torlódási pontjaiból kapjuk $\langle a_n\rangle$ határértékkel való szorzásával. Ez pedig nem fogja megváltoztatni a torlódási pontok nagyságbeli sorrendjét, hiszen $\langle a_n\rangle$ határértéke pozitív.
Ha $\langle b_n\rangle$ felülről nem korlátos sorozat, akkor $\langle a_n b_n\rangle$ sem korlátos felülről, hiszen $\langle a_n\rangle$ határértéke pozitív, azaz elemei véges sok elemtől eltekintve nagyobbak egy létező pozitív számnál. Így mindkét sorozat felső határértéke végtelen. Hasonló megfontolásból következik, hogy ha $\langle b_n\rangle$ alulról nem korlátos sorozat, akkor $\langle a_n b_n\rangle$ sem korlátos alulról, így mindkét sorozat alsó határértéke mínusz végtelen.
Végül, ha $b_n \to -\infty$, akkor szintén $a_n b_n \to -\infty$, azaz mindkét sorozat felső határértéke mínusz végtelen, illetve ha $b_n \to \infty$, akkor szintén $a_n b_n \to \infty$, azaz mindkét sorozat alsó határértéke végtelen.

Ha az $\langle a_n\rangle$ sorozat határértéke negatív, akkor az állítás rögtön következik az előző pontból és (10) egyenlőségeiből.

10. Feladatok

10. Feladat. Hogyan változik az 12. tétel $a_n \to -\infty$ esetén?

11. Feladat. Igazoljuk, hogy ha $a_n \to \infty$ és $b_n \to \infty$, akkor $a_n + b_n \to \infty$ és $a_n b_n \to \infty$.

12. Feladat. Igazoljuk, hogy ha az $\langle a_n \rangle$ sorozat korlátos és $b_n \to \infty$, akkor $a_n + b_n \to \infty$.

13. Feladat. Adjunk példát olyan $\langle a_n \rangle$ és $\langle b_n \rangle$ sorozatra, hogy $a_n \to \infty$, $b_n \to 0$, és

a) $a_n b_n \to \infty$, b) $a_n b_n \to 1$, c) $a_n b_n \to 0$,

d) $a_n b_n$ divergens még tágabb értelemben is!

14. Feladat. Adjunk példát olyan $\langle a_n \rangle$ és $\langle b_n \rangle$ sorozatra, hogy $a_n \to \infty$, $b_n \to \infty$, és

a) $a_n - b_n \to \infty$, b) $a_n - b_n \to 1$, c) $a_n - b_n \to 0$,

d) $\dfrac{a_n}{b_n} \to \infty$, e) $\dfrac{a_n}{b_n} \to 1$, f) $\dfrac{a_n}{b_n} \to 0$.

15. Feladat. Adjunk példát olyan $\langle a_n \rangle$ és $\langle b_n \rangle$ sorozatra, hogy $a_n \to 0$, $b_n \to 0$, és

a) $\dfrac{a_n}{b_n} \to \infty$, b) $\dfrac{a_n}{b_n} \to 1$, c) $\dfrac{a_n}{b_n} \to 0$,

d) $\dfrac{a_n}{b_n}$ divergens még tágabb értelemben is!

16. Feladat. Legyen $\langle a_n \rangle$ és $\langle b_n \rangle$ két valós számsorozat és $a_n b_n = 0$. Igaz-e, hogy ekkor $\langle a_n \rangle$ vagy $\langle b_n \rangle$ nullsorozat?

17. Feladat. Adjunk példát olyan divergens $\langle a_n \rangle$ sorozatra, hogy a $b_n := |a_n|$ sorozat konvergens!

18. Feladat. Igazoljuk, hogy ha $\langle a_n \rangle$ egy valós számsorozat és $b_n := |a_n|$ nullsorozat, akkor $\langle a_n \rangle$ is nullsorozat!

19. Feladat. Legyen $\langle a_n \rangle$ és $\langle b_n \rangle$ két valós számsorozat és $a_n \le 0 \le b_n$ minden $n \in \mathbf{N}$ esetén. Bizonyítsuk be, hogy ha $a_n - b_n \to 0$, akkor $\langle a_n \rangle$ és $\langle b_n \rangle$ nullsorozat!

20. Feladat. Igazoljuk, hogy $a_n := \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ sorozat monoton csökkenően tart e-hez!

21. Feladat. Határozzuk meg a következő sorozatok határértékét!

1. $a_n := 4n^4 - 3n^3 - n + 1,$
2. $a_n := 8 - n^3,$
3. $a_n := \dfrac{n^3 + 3n^2 - 1}{n - n^3},$
4. $a_n := \dfrac{n^3 + n + 5}{n^2 + 4},$
5. $a_n := \dfrac{5 - n^2}{2n + 3},$
6. $a_n := \dfrac{n^2 + 3n - 1}{n^3 + 2n},$
7. $a_n := \dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{(n-1)(n-2)(n-3)},$
8. $a_n := \dfrac{n^2 - 1}{n + 2} - \dfrac{n^2}{n + 3},$
9. $a_n := \dfrac{n^5 + 1}{(n+1)^5},$
10. $a_n := \dfrac{n^2(2n+1)^3 + 2n}{2 - n^3(n^2 + 2)},$
11. $a_n := \dfrac{\sqrt{1 + 9n}}{1 + \sqrt{n}},$
12. $a_n := \dfrac{\sqrt[3]{n^2 + n} + 2n}{2 + \sqrt{n^2 + n}},$
13. $a_n := \dfrac{\sqrt[3]{n^4 + 3} - \sqrt[4]{n^5 + 4}}{\sqrt{n^3 + 2} + n + 1},$
14. $a_n := \dfrac{\sqrt[3]{n^4 + 1} - n^2}{\sqrt[3]{2 - n^3} + 8},$
15. $a_n := \sqrt{n + 1} - \sqrt{n - 1},$
16. $a_n := n\left(\sqrt[3]{n^3 + n} - n\right),$
17. $a_n := \sqrt[3]{n^3 + n^2} - \sqrt[3]{n^3 + 1},$
18. $a_n := \dfrac{n - \sqrt[3]{n^3 - 3n}}{\sqrt{n^4 + n} - n^2},$
19. $a_n := \dfrac{2^n}{2^n + 1},$
20. $a_n := \dfrac{2^{n+3} + 3^n}{2^n + 3^{n+2}},$
21. $a_n := \dfrac{5^n - 3^{n+2}}{3^n - 2^{2n+1}},$
22. $a_n := \dfrac{2^n + (-1)^n}{2^n - 1},$
23. $a_n := \dfrac{3^n + (-2)^n}{5 \cdot 3^n + 1},$
24. $a_n := \dfrac{2 \cdot 5^n + (-3)^n + (-1)^n}{2^n - (-5)^n},$
25. $a_n := \dfrac{\sqrt[3]{8^{n+1} + 4^n + 1} + 1}{2^{n+1} - 1},$
26. $a_n := \sqrt{4^n - 2^n} - 2^n,$
27. $a_n := \sqrt[n]{n^3 + 2n - 1},$
28. $a_n := \sqrt[n]{n^4 - 3n^2 + 5},$
29. $a_n := \sqrt[2n]{n^3 - 4n^2 + n + 1},$
30. $a_n := \sqrt[3n]{n^5 - 5n^4 + 4n^3},$
31. $a_n := \dfrac{\sqrt[n]{4} - 1}{\sqrt[n]{2} - 1},$
32. $a_n := \dfrac{\sqrt[n]{27} - 1}{\sqrt[n]{3} - 1},$
33. $a_n := \sqrt[n]{5^n + 3^n},$
34. $a_n := \sqrt[n]{8^n - 4^{n+1} + 1},$
35. $a_n := \sqrt[n]{4^{n+1} + (-4)^n},$
36. $a_n := \sqrt[n]{5^n + (-3)^{n+1} - (-2)^{2n}},$
37. $a_n := \sqrt[n]{3^n - 2n^2 + n},$
38. $a_n := \sqrt[n]{5^n - n^2 + (-1)^n},$

39. $a_n := \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$,

40. $a_n := \left(\frac{4n+1}{4n-1}\right)^n$,

41. $a_n := \left(\frac{3n-2}{3n+3}\right)^{2n+5}$,

42. $a_n := \left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^{n+3}$,

43. $a_n := \left(\frac{2n+3}{n-1}\right)^{3n+1}$,

44. $a_n := \left(\frac{n^2+4}{n^2+2}\right)^n$,

45. $a_n := \left(\frac{n^2+3}{n^2+1}\right)^{2n^2}$,

46. $a_n := \left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)^{n^2}$.

22. Feladat. Határozzuk meg a következő sorozatok határértékét!

1. $a_{n+1} := \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)$, $\quad a_1 := 4$,
2. $a_{n+1} := \frac{1}{3}\left(2a_n + \frac{1}{8a_n^2}\right)$, $\quad a_1 := 1$,
3. $a_{n+1} := \frac{a_n}{4} + 3$, $\quad a_1 := 12$,
4. $a_{n+1} := \frac{a_n^3+1}{2}$, $\quad a_1 := 0$,
5. $a_{n+1} := \frac{a_n}{1+a_n}$, $\quad a_1 := \frac{3}{4}$,
6. $a_{n+1} := 2 - \frac{1}{a_n}$, $\quad a_1 := 2$,
7. $a_{n+1} := 5 - \frac{6}{a_n}$, $\quad a_1 := 6$,
8. $a_{n+1} := \frac{a_n^2+8}{9}$, $\quad a_1 := 6$,
9. $a_{n+1} := \sqrt{5a_n - 4}$, $\quad a_1 := 2$,
10. $a_{n+1} := 1 - \sqrt{1-a_n}$, $\quad a_1 := \frac{1}{2}$.

23. Feladat. Határozzuk meg a következő többször egymásba ágyazott képletek eredményét!

1. $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}$,
2. $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\ldots}}}$,
3. $\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\ldots}}}$,

24. Feladat. Határozzuk meg a következő sorozatok határértékét!

1. $a_n := \dfrac{1+2+\ldots+n}{n+2} - \dfrac{n}{2}$,
2. $a_n := \dfrac{1+2+\ldots+2^n}{1+3+\ldots+3^n}$,
3. $a_n := \dfrac{1+3+\ldots+2n-1}{n^2+1}$,
4. $a_n := \dfrac{1+3+\ldots+3^n}{(-2)^n+3^{n+1}}$,
5. $a_n := \dfrac{(-1)^n}{2n^3-1}$,
6. $a_n := \dfrac{\cos^2(n+\frac{\pi}{2})}{n+1}$,
7. $a_n := \dfrac{1}{n}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$,
8. $a_n := \dfrac{e^{\frac{1}{n^3}}}{n^2+1}$,
9. $a_n := \dfrac{10n}{3^n}$,
10. $a_n := \dfrac{n^2+n}{n!}$,
11. $a_n := \dfrac{2n+1}{n^n}$,
12. $a_n := \dfrac{n!}{3^n}$,
13. $a_n := \dfrac{n^n}{(n!)^2}$,
14. $a_n := \dfrac{n^5+5n}{5^n}$,
15. $a_n := \dfrac{3^n+1}{n^n}$,
16. $a_n := \dfrac{3^{n+1}}{3n+1}$.

25. Feladat. Igazoljuk, hogy ha az a_n sorozatnak van pozitív alsó és felső korlátja, akkor az $\sqrt[n]{a_n}$ sorozat tart 1-hez.

26. Feladat. Legyen $x \in \mathbf{R}$. Határozzuk meg az

$$a_n := \frac{[x]+[2x]+[3x]+\cdots+[nx]}{n}$$

sorozat határértékét!

27. Feladat. Határozzuk meg a következő sorozat határértékét!

$$a_n := \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}$$

28. Feladat. Igazoljuk, hogy ha

$$a_n := \begin{cases} 2^{-n^2} & \text{ha } n \text{ páros,} \\ 3^{-n^2} & \text{ha } n \text{ páratlan,} \end{cases}$$

akkor a $b_n := \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ sorozat divergens, de a $c_n := \sqrt[n]{a_n}$ sorozat konvergens.

29. Feladat. Határozzuk meg a következő sorozatok határértékét!

1. $c_n := \sqrt[n]{\dbinom{n}{3}}$,
2. $c_n := \sqrt[n]{n! - 2^n}$,
3. $c_n := \dfrac{n^2}{\sqrt[n]{(2n)!}}$,
4. $c_n := \dfrac{1}{n}\sqrt[n]{\dfrac{(2n)!}{n!}}$,
5. $a_n := \dfrac{\sqrt[n]{2^n+1}}{n}$,
6. $a_n := \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{2^n+3^n}$.

30. Feladat. Legyen k egy pozitív egész szám. Igazoljuk, hogy

$$c_n := \frac{n^k}{\sqrt[n]{(kn)!}} \to \left(\frac{e}{k}\right)^k.$$

31. Feladat. Határozzuk meg a következő sorozatok torlódási és kiterjesztett torlódási pontjait!

a) $a_n := \dfrac{n(1+(-1)^n)}{n^2+1}$,

b) $a_n := \left(\dfrac{5n^2+n}{2n^2-1} + (-1)^n\right)\sqrt[n]{2}$,

c) $a_n := \left(\sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right) + 2\right)2^n$,

d) $a_n := \left(\cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right) + 2^n\right) \cdot \dfrac{n-1}{n}$.

Ajánlott irodalom

[1] Laczkovich Miklós és T. Sós Vera: *Valós analízis I.*, Typotex ekiadó, Budapest, 2012.

[2] Leindler László – Schipp Ferenc: *Analízis I*, Tankönyvkiadó, 1985.

[3] Sain Márton: *Nincs királyi út! : Matematikatörténet*, Gondolat Könyvkiadó, Budapest, 1986.

[4] Leindler László: *Analízis*, Polygon, Szeged, 2001.

[5] Rimán János: *Matematikai analízis I*, Liceum, Eger, 2004.

[6] Rimán János: *Matematikai analízis feladatgyűjtemény I-II*, Liceum, Eger, 2004.

[7] Rudin Walter: *A Matematikai analízis alapjai*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978.

[8] Szabó Tamás: *Kalkulus I. Példatár*, Polygon, Szeged, 2004.

[9] Toledo Rodolfo: *Halmazok, relációk, függvények*, elektronikus tananyag, 2016. http://bit.ly/toledo-tananyag-halmazok

[10] Toledo Rodolfo: *Valós számok*, elektronikus tananyag, 2017. http://bit.ly/toledo-tananyag-valos_szamok

[11] Toledo Rodolfo: *Valós függvények*, elektronikus tananyag, 2018. http://bit.ly/toledo-tananyag-valos_fv

[12] Toledo Rodolfo: *Számsorozatok és tulajdonságaik*, elektronikus tananyag, 2018. http://bit.ly/toledo-tananyag-sorozatok-tulajd

Tárgymutató